

5.10 Τραπεζίο

Ορισμός

Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

Οι παράλληλες πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ (σχ.34) του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.

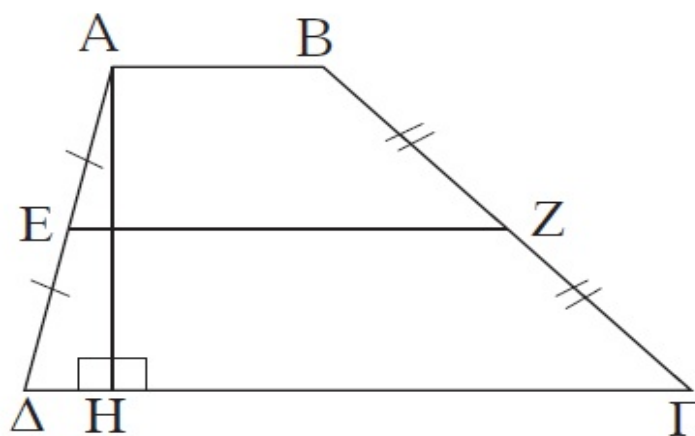
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα EZ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν EZ διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

$$\text{i) } EZ \parallel AB, \Gamma\Delta \text{ και } \text{ii) } EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}.$$

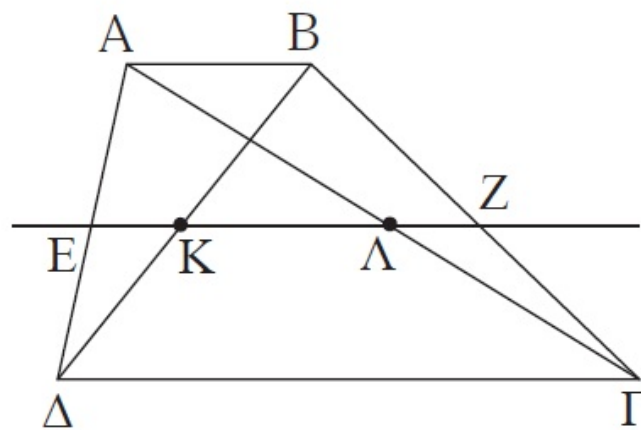


Σχήμα 34

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

$$ΚΛ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2} \text{ (με } ΓΔ > ΑΒ \text{)}.$$



Σχήμα 36

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

► Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

► Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

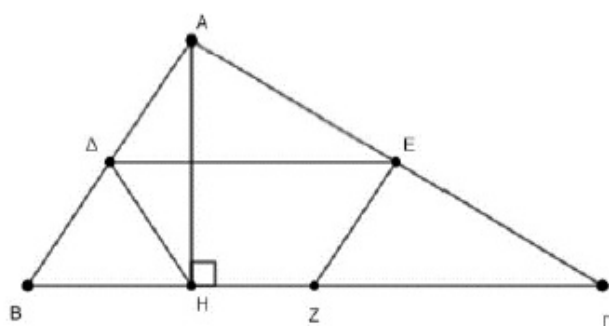
Ασκήσεις από προτεινόμενα θέματα

6) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E , Z είναι τα μέσα των AB , AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel ZH$.

β) Να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

6)



α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΔE ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Συνεπώς:
 $\Delta E \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \Delta E \parallel ZH$.

β) Στο τετράπλευρο ΔEZH οι απέναντι πλευρές ΔE και HZ είναι παράλληλες ενώ οι ΔH και EZ δεν είναι παράλληλες. Δηλαδή το τετράπλευρο ΔEZH είναι τραπέζιο. Για να είναι ισοσκελές τραπέζιο πρέπει οι μη παράλληλες πλευρές του να είναι ίσες. Δηλαδή, πρέπει να δείξω ότι $\Delta H = EZ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHB το ευθύγραμμο τμήμα HZ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AB , άρα $H\Delta = \frac{AB}{2}$ (1)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ευθύγραμμο τμήμα EZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Δηλαδή $EZ = \frac{AB}{2}$ (2)

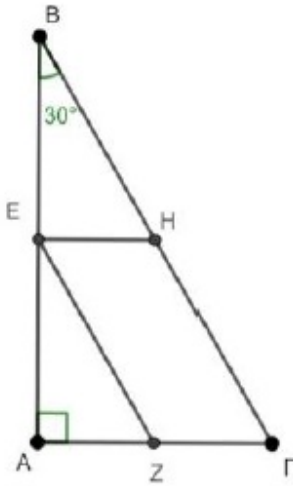
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta H = EZ$.

5) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$ και E, Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $EZ = A\Gamma$.

β) Αν φέρουμε EH κάθετη στην AB που τέμνει την $B\Gamma$ στο H , να αποδειχθεί ότι $EZ\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.

5)



α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η πλευρά $A\Gamma$ βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° , άρα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή ισχύει: $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ (1)

Επίσης, το τμήμα EZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου, άρα είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς.

Δηλαδή ισχύει: $EZ = \frac{B\Gamma}{2}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι: $EZ = A\Gamma$.

β) Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $EH \perp AB$. Επίσης $A\Gamma \perp AB$. Συνεπώς $A\Gamma \parallel EH \Leftrightarrow Z\Gamma \parallel EH$. Επίσης $EZ \parallel B\Gamma \Leftrightarrow EZ \parallel H\Gamma$. Δηλαδή οι πλευρές του τετράπλευρου $EZ\Gamma H$ είναι (ανά δύο) παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο $EZ\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.