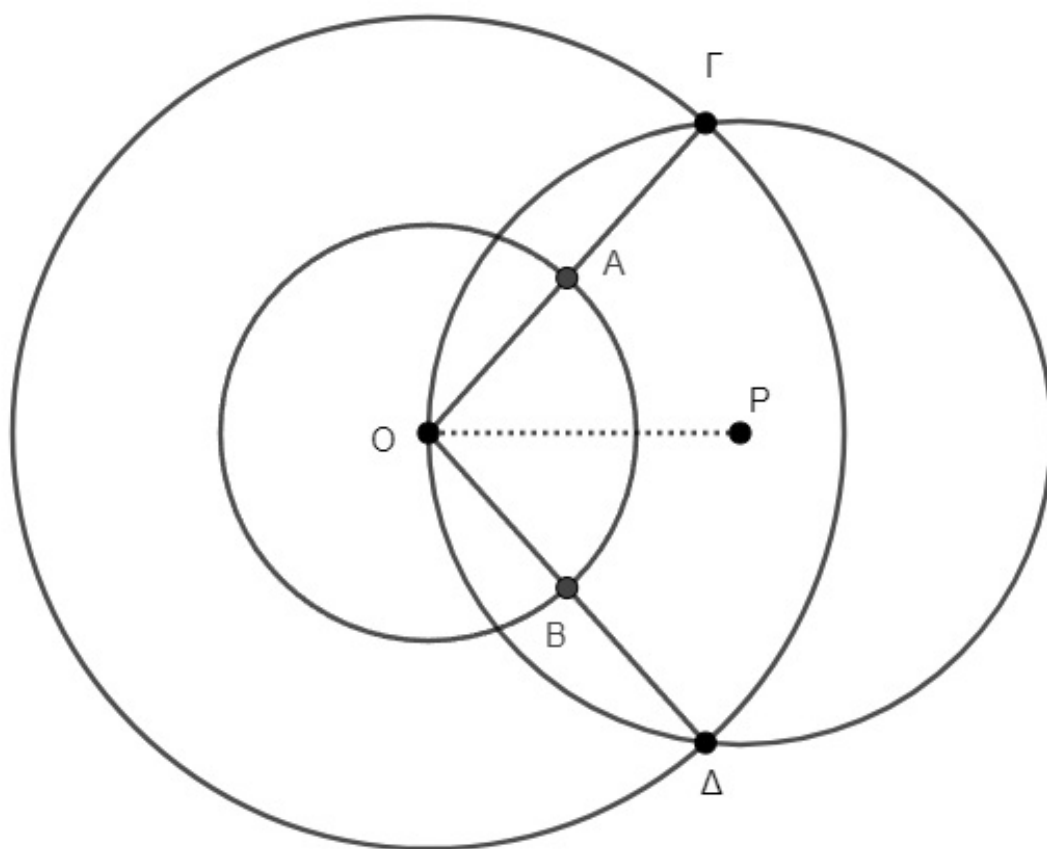


Αποδεικτικές Ασκήσεις (Σελ. 72)

1. Δίνεται κύκλος (O, R) και εξωτερικό σημείο του P , ώστε $OP < 2R$. Γράφουμε τον κύκλο $(O, 2R)$. Να αποδείξετε ότι:

- i) ο κύκλος $(O, 2R)$ τέμνει τον κύκλο (P, PO) σε δύο σημεία Γ και Δ ,
- ii) τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Gamma$ και $O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο (O, R) στα σημεία A και B ,
- iii) τα PA και PB εφάπτονται στον (O, R) .



ΛΥΣΗ

1. i) Για να τέμνονται οι κύκλοι $(O, 2R)$ και (P, PO) πρέπει να ισχύει:

$$2R - PO < PO < PO + 2R, \text{ γιατί } PO < 2R.$$

Η δεξιά ανισότητα προφανώς ισχύει. Για την αριστερή έχουμε:

$$2R - PO < PO \Leftrightarrow 2R < 2PO \Leftrightarrow PO > R$$

που ισχύει αφού P εξωτερικό σημείο του (O, R) .

ii) Επειδή $(O\Gamma) = 2R > R$ το Γ είναι εξωτερικό σημείο του (O, R) , άρα η $O\Gamma$ τέμνει τον (O, R) στο A . Όμοια η $O\Delta$ τέμνει τον (O, R) στο B .

iii) Επειδή $(OA) = R$ και $(O\Gamma) = 2R$ το A είναι μέσο της χορδής $O\Gamma$ του κύκλου (P, PO) , οπότε $PA \perp O\Gamma$, επομένως PA εφαπτόμενη του (O, R) . Όμοια αποδεικνύεται ότι και η PB είναι εφαπτόμενη του (O, R) .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

4.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην §2.3, δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

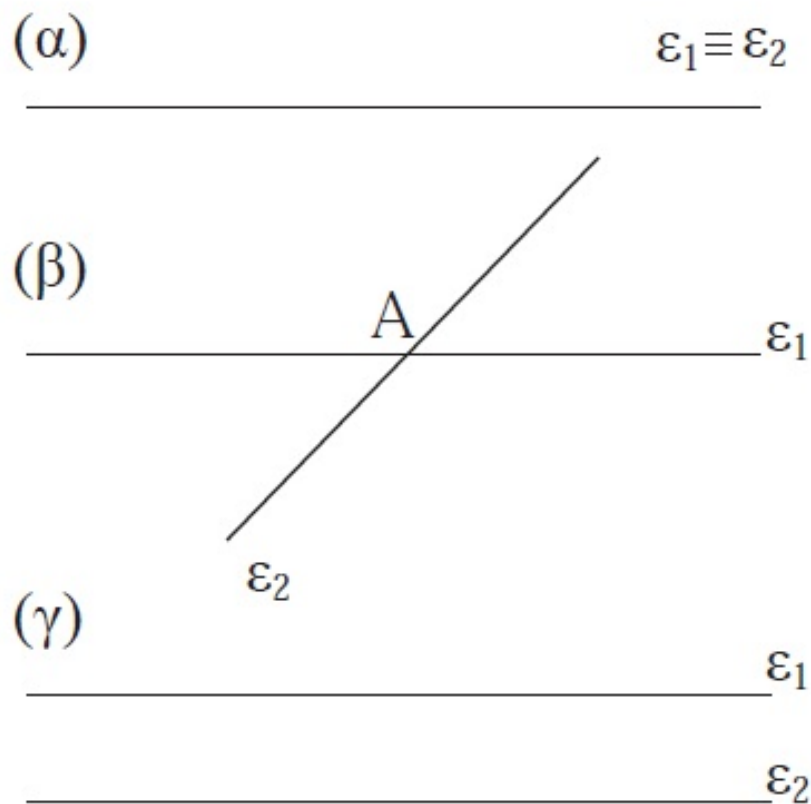
Επομένως, οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών ε_1 και ε_2 , οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:

- i) ταυτίζονται (σχ.1α),
- ii) τέμνονται (σχ.1β),
- iii) δεν τέμνονται (σχ.1γ).

Στην τρίτη περίπτωση οι ευθείες ε_1 και ε_2 λέγονται **παράλληλες**, ώστε:

Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

Για να δηλώσουμε ότι οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



Σχήμα 1

4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 . Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες.

Οι γωνίες γ , δ , ε , ζ που βρίσκονται μεταξύ των ε_1 , ε_2 λέγονται “*εντός*”, ενώ οι γωνίες α , β , η , θ λέγονται “*εκτός*”. Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ε_3 λέγονται “*επί τα αυτά μέρη*”, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ε_3 λέγονται “*εναλλάξ*”.

Έτσι, με συνδυασμό και των δύο χαρακτηρισμών, οι γωνίες ε και γ λέγονται *εντός εναλλάξ*, οι γωνίες ε και α λέγονται *εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη*, ενώ οι γωνίες ε και δ λέγονται *εντός και επί τα αυτά μέρη*.