

## ► Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

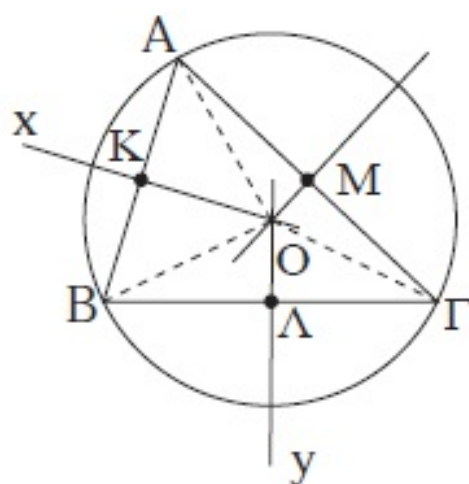
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται *περιγεγραμμένος* κύκλος του τριγώνου και επιπλέον αποδεικνύεται ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται *περίκεντρο*.

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $K, \Lambda, M$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι  $Kx$  και  $\Lambda y$  των  $AB, B\Gamma$  θα τέμνονται σε σημείο  $O$ , αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους  $AB$  και  $B\Gamma$ . Το  $O$  ισαπέχει από τις κορυφές  $A$  και  $B$  αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς  $AB$ , δηλαδή  $OA = OB$ . Επίσης  $OB = O\Gamma$ , αφού το  $O$  ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς  $B\Gamma$ . Επομένως ισχύει ότι  $OA = O\Gamma$ , οπότε το  $O$  θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της  $A\Gamma$ . Άρα, ο κύκλος  $(O, OA)$  θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.



Σχήμα 15

## ► Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Ένας άλλος σημαντικός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος με την ιδιότητα αυτή. Ο κύκλος αυτός λέγεται *εγγεγραμμένος* κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του, το οποίο λέγεται *έγκεντρο*, θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

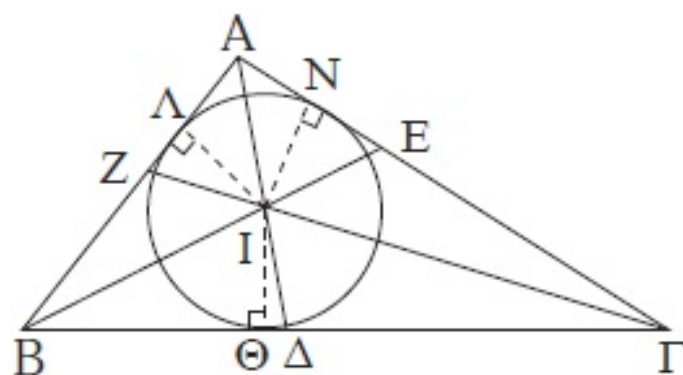
### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και οι διχοτόμοι  $BE$  και  $\Gamma Z$  των γωνιών του  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  αντίστοιχα. Οι  $BE$  και  $\Gamma Z$  τέμνονται σε σημείο  $I$

αφού  $E\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2L$ . (§4.2 - Πρόταση IV)

Το  $I$  ως σημείο της διχοτόμου της  $\hat{B}$  θα ισαπέχει από τις πλευρές της  $BA$  και  $B\Gamma$ , δηλαδή  $IL = IO$ . Ανάλογα το  $I$  θα ισαπέχει από τις πλευρές της  $\hat{\Gamma}$ , δηλαδή  $IO = IN$ . Επομένως το  $I$  ισαπέχει από τις  $AB$  και  $A\Gamma$  και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ .

Τελικά, το  $I$  είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το  $I$  και ακτίνα την κοινή απόσταση του  $I$  από τις πλευρές του  $AB\Gamma$ , γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



Σχήμα 16

**Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. Εμπ. 4, 5 (σελ. 87)**