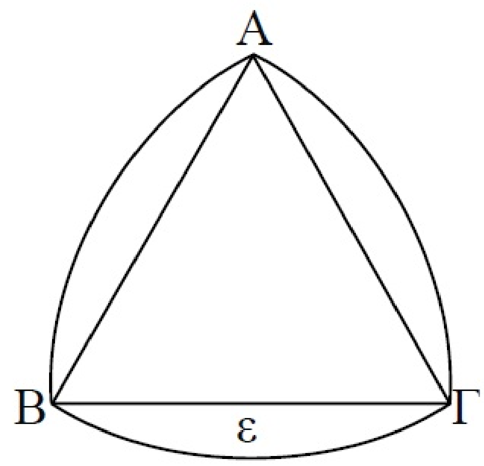
**3.** *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Α, α), (Β, α) και (Γ, α) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.*




Τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma A}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ είναι τόξα ίσων κύκλων και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες, $60^\circ$, επομένως είναι ίσα, άρα και τα μήκη τους θα είναι ίσα.

Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι $\dfrac{\pi\alpha\cdot 60^\circ}{180^\circ}=\dfrac{\pi\alpha}{3}$, οπότε η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}$ είναι: $3\dfrac{\pi\alpha}{3}=\pi\alpha$.

Έστω ε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος χορδής ΒΓ.

Τότε: $\varepsilon=(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}})-(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{\pi\alpha^2\cdot 60^\circ}{360^\circ}-\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\pi\alpha^2}{6}-\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

Το εμβαδόν Ε του καμπυλογράμμου τριγώνου θα είναι πλέον:

$$\mathrm{E}=(\mathrm{AB\Gamma})+3\varepsilon=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}+3\left(\frac{\pi\alpha^2}{6}-\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\pi-\sqrt{3}\right)\alpha^2.$$

**5.** *Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.*

Είναι φανερό ότι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$ είναι ίσα, οπότε έχουν και ίσα μήκη. Το μήκος π.χ. του $\overset{\frown}{AB}$ είναι $\dfrac{\pi R 60^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi R}{3}$, οπότε η περίμετρος του καμπυλογράμμου τριγώνου είναι: $3\dfrac{\pi R}{3} = \pi R$.

Έστω ε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$.

Τότε: $\varepsilon = (K\Lambda M) - 3(M\overset{\frown}{AB})$ (1).

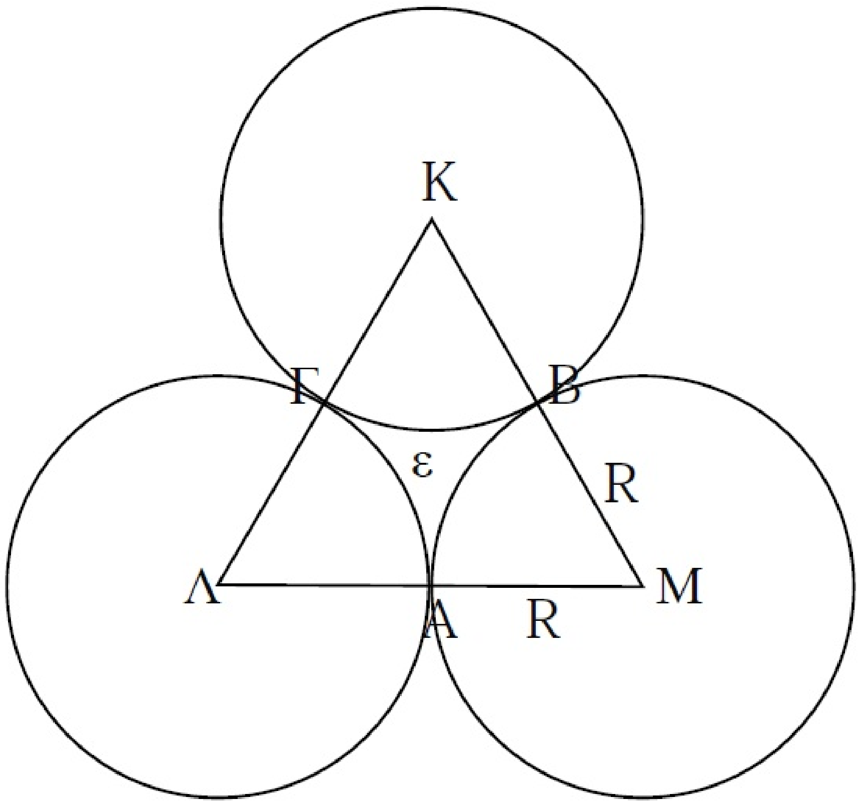
Είναι $(K\Lambda M) = \dfrac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$

και $(M\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi R^2 60^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\pi R^2}{6}$,

οπότε αντικαθιστώντας στην (1)

βρίσκουμε:

$$\varepsilon = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{R^2}{2}\left(2\sqrt{3} - \pi\right).$$



# 14534

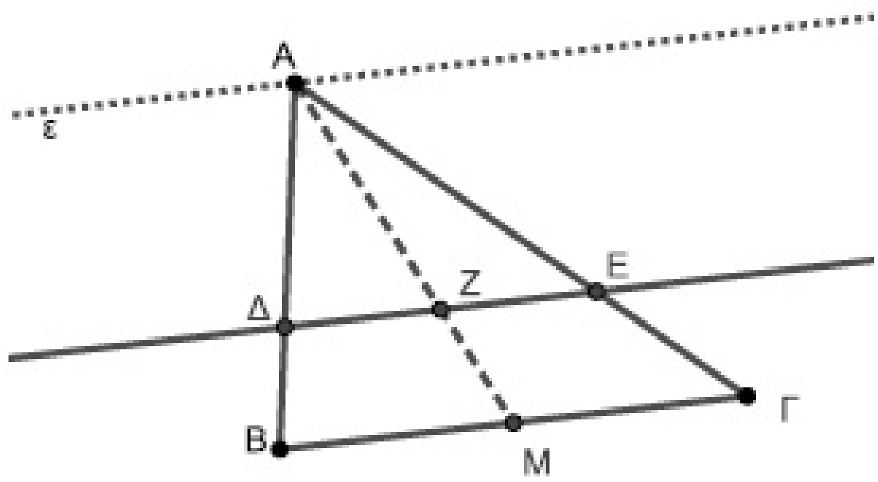
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$ . (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΕΓ. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ




α) Θεωρούμε υποθετική ευθεία ε από το σημείο Α παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Τότε ε//ΔΕ//ΒΓ και οι ΑΒ, ΑΜ είναι τέμνουσες των ευθειών αυτών. Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AZ}{AM}$, οπότε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ (1). Από το θεώρημα του Θαλή για τις τέμνουσες ΑΜ και ΑΓ έχουμε ότι $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$ (2). Από ιδιότητες αναλογιών $\frac{AE}{A\Gamma - AE} = \frac{2}{3-2}$, δηλαδή $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$.

β) Από τη σχέση (1) του ερωτήματος α) έχουμε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ ή $A\Delta = \frac{2}{3} \cdot AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

Αντίστοιχα από τη σχέση (2) έχουμε $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{2}{3}$ ή $AE = \frac{2}{3} \cdot A\Gamma = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$. Οπότε, $E\Gamma = A\Gamma - AE =$
$= 9 - 6 = 3$.

# 14549

ΘΕΜΑ 2

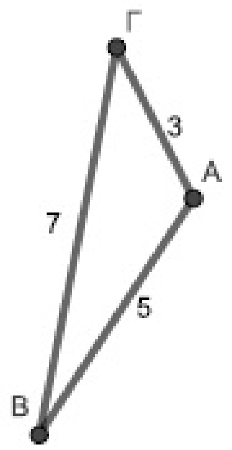
Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : α=7, β=3 και γ=5.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

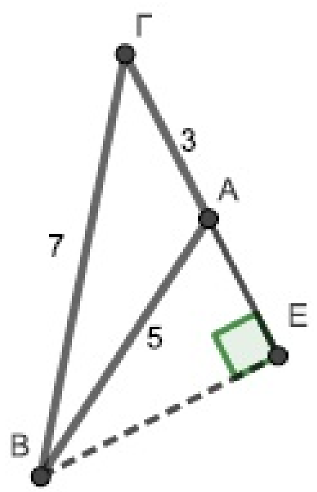
ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών ΑΒ = γ = 5, ΑΓ = β = 3 και ΒΓ = α =7. Συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του.




Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 = 7^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. Δηλαδή ισχύει ότι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά α , δηλαδή αμβλεία είναι η γωνία Α.

β)




Για να σχεδιάσουμε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ φέρουμε κάθετο τμήμα από την κορυφή Β προς το φορέα της πλευράς ΑΓ. Αν Ε είναι το σημείο τομής της καθέτου αυτής με το φορέα της ΑΓ, τότε η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Από τη γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot AE$ ή $7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot AE$ ή $49 = 34 + 6 \cdot AE$ ή $49 - 34 = 6 \cdot AE$ ή $15 = 6 \cdot AE$ ή $AE = \frac{15}{6}$.

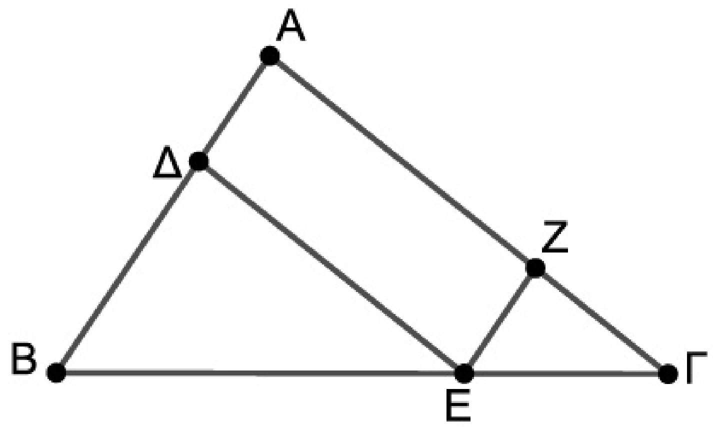
# 14579

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΑΓ. Επίσης ΑΒ = 3ΑΔ.

α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{\mathrm{Β}\Delta}{\mathrm{Α}\Delta}$ και $\frac{\mathrm{ΒΕ}}{\mathrm{Ε}\Gamma}$. (Μονάδες 15)

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΓ = 3,9 και ΓΖ = 1,3 να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη της ΑΒ. (Μονάδες 10)




## ΛΥΣΗ

α) Εφόσον ΑΒ = 3ΑΔ είναι ΒΔ + ΑΔ = 3ΑΔ ή ΒΔ = 2ΑΔ. Άρα $\frac{B\Delta}{A\Delta} = 2$.

Η ευθεία ΔΕ που είναι φορέας του ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, άρα χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{BE}{E\Gamma}$, άρα $\frac{BE}{E\Gamma} = 2$.

β) Από το α) έχουμε ότι το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΒΓ σε τμήματα με λόγο 2.

Εφόσον ΑΓ = 3,9, τότε ΑΖ + ΓΖ = 3,9. Όμως ΓΖ = 1,3, άρα ΑΖ + 1,3 = 3,9 ή ΑΖ = 2,6.

Επομένως $\frac{AZ}{\Gamma Z} = \frac{2,6}{1,3} = 2$. Άρα το σημείο Ζ διαιρεί το τμήμα ΑΓ σε τμήματα με λόγο 2.

Εφόσον η ευθεία ΖΕ χωρίζει τις πλευρές του τριγώνου ΑΓ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα με λόγο 2, η ΖΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, την ΑΒ.

# 21101

ΘΕΜΑ 2

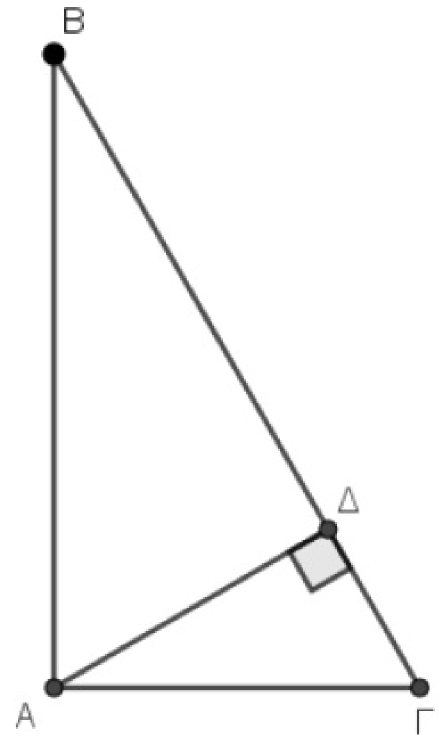
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = $\sqrt{3}$, ΑΒ = $\sqrt{2}$, ΑΓ = 1.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90^o$. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

## ΛΥΣΗ




α)

Έχουμε:

$ΒΓ^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$

Επομένως, είναι $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, άρα η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΒΓ είναι ορθή, δηλαδή $\widehat{A} = 90^o$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να δοθεί και από τον τύπο

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ\cdot ΑΔ$$

Στο ερώτημα β) βρήκαμε ότι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot ΑΔ \quad ή \quad \sqrt{2} = \sqrt{3}\cdot ΑΔ \quad ή \quad ΑΔ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

# 21299

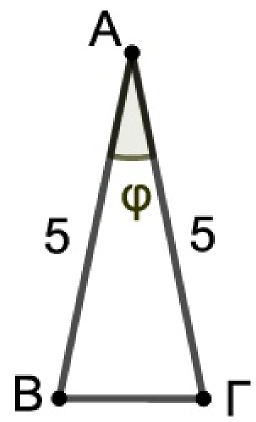
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = 5$ και η γωνία της κορυφής $\hat{\varphi}$ έχει $\eta\mu\varphi = \frac{2}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε το ύψος ΒΗ του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε το μήκος του.

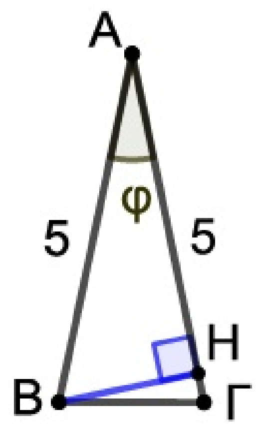
(Μονάδες 13)




ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{5} = 5$.

β) Σχεδιάζουμε το ύψος ΒΗ του ΑΒΓ από την κορυφή Β, κάθετα στην πλευρά ΑΓ.




Για το εμβαδόν του ΑΒΓ ισχύει ότι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{BH} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \mathrm{BH} = \frac{5}{2} \cdot \mathrm{BH}$.

Από τη λύση του ερωτήματος α) έχουμε ότι $(\mathrm{AB\Gamma}) = 5$.

Άρα $\frac{5}{2} \cdot \mathrm{BH} = 5$ ή $\mathrm{BH} = \frac{2}{5} \cdot 5$ ή $\mathrm{BH} = 2$.

**22514**

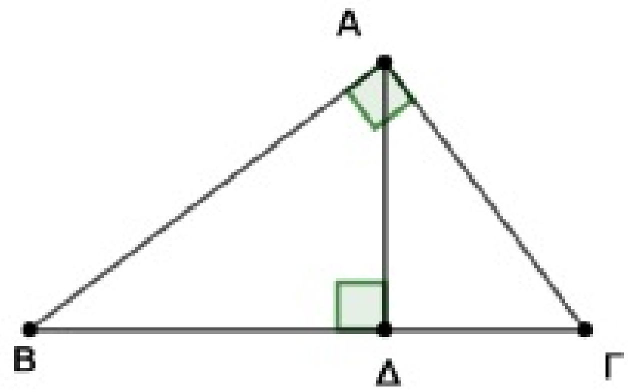
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\widehat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 5 και ΑΒ = 4. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 9)

β) την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 8)




ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, άρα $A\Gamma = 3$ .

β) Έχουμε $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$ , οπότε $B\Delta = \dfrac{AB^2}{B\Gamma} = \dfrac{16}{5}$ .

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$, οπότε

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 4^2 - \frac{16^2}{5^2} = 16 - \frac{16 \cdot 16}{25} = \frac{16 \cdot 25 - 16 \cdot 16}{25} =$$

$$\frac{16 \cdot (25 - 16)}{25} = \frac{16 \cdot 9}{25}, \text{ άρα } B\Delta = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} .$$