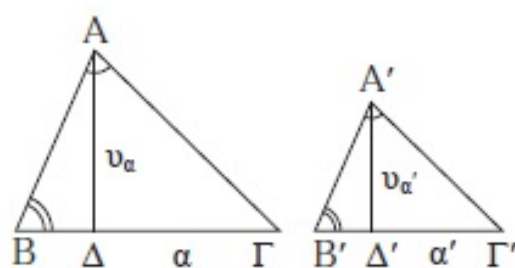


10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων



Σχήμα 20

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ.20) με

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ και } \hat{B} = \hat{B}'.$$

Τότε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{v_a}{v_{a'}} = \lambda$ (1), όπου λ ο λόγος ομοιότητας. Αλλά, όπως και παραπάνω, είναι $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{v_a}{v_{a'}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \lambda^2$.

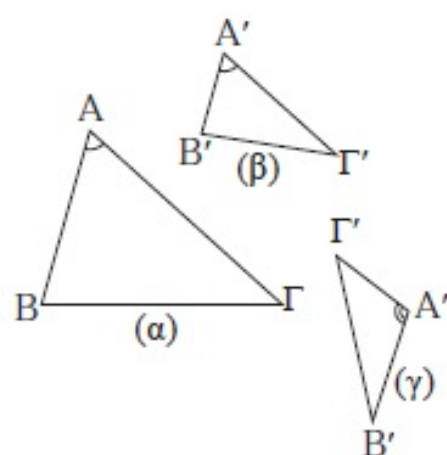
Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει γενικότερα και για όμοια πολύγωνα, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ III

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.



Σχήμα 22

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.22 α,β) ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ (σχ.22 α, γ). Τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει $\eta\mu A = \eta\mu A'$, οπότε από τις ισότητες

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \eta\mu A \text{ και } E' = \frac{1}{2} \beta' \cdot \gamma' \eta\mu A'$$

με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$, που είναι το ζητούμενο.

Για το επόμενο μάθημα: Ερ. Κατ: 1, 2, 3, Ασκ. Εμπ: 2, 3 (σελ. 83)