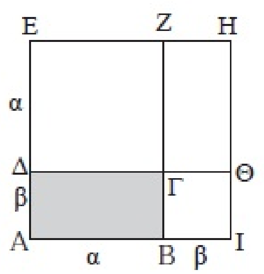
10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Δηλαδή αν α, β, οι πλευρές και Ε το εμβαδόν είναι:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$$



Σχήμα 7

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β (σχ.7). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = α, την ΑΒ κατά ΒΙ = β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α + β και επομένως είναι:

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\alpha + \beta)^2 \quad (1).$$

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε

$$(\text{ΔΓΖΕ}) = \alpha^2,\ (\text{ΒΙΘΓ}) = \beta^2 \text{ και } (\text{ΓΘΗΖ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) \quad (2)$$

Είναι φανερό όμως ότι

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) + (\text{ΓΘΗΖ}) + (\text{ΒΙΘΓ}) + (\text{ΔΓΖΕ}),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(\text{ΑΒΓΔ}) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

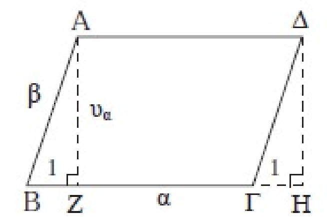
$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \alpha \cdot \beta.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

Δηλαδή $\quad \mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\upsilon}_\alpha = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\upsilon}_\beta$,

όπου α, β οι πλευρές και υ_α, υ_β τα αντίστοιχα ύψη.



Σχήμα 8

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ) = ΒΓ · ΑΖ.

Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90°$, ΑΒ = ΔΓ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$), οπότε: (ΖΒΑ) = (ΗΓΔ) (1).

Από το σχήμα όμως έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΓΔ), οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΖΓΔ}) + (\text{ΔΓΗ}) = (\text{ΑΖΗΔ}).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα I έχουμε

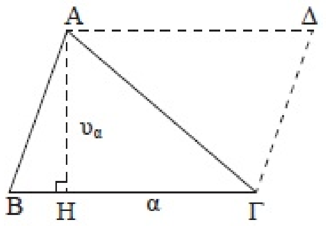
$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΖΗΔ}) = \text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΖ} = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΖ},$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Δηλαδή $$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{\alpha} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{\beta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{\gamma}.$$



Σχήμα 9

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(ΑΒΓΔ) = \alpha \cdot \upsilon_\alpha \quad (1).$$

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:

$$(ΑΒΓ) = (ΑΔΓ) \quad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha \cdot \upsilon_\alpha = 2(ΑΒΓ) \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha .$$