

9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{A} < 1L$ και $A\Delta$ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β , τότε ισχύει ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta.$$

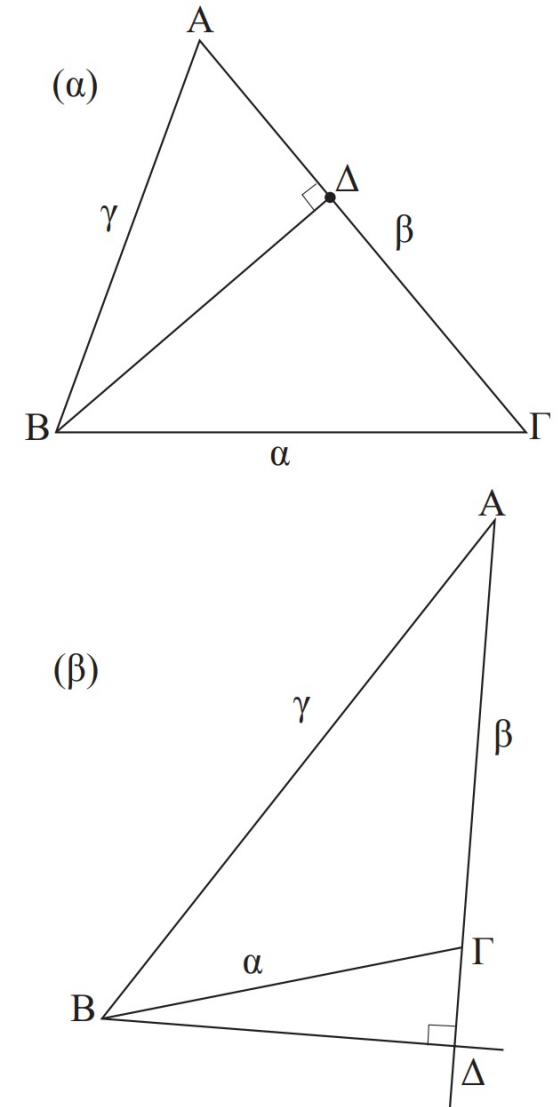
Απόδειξη: Π.Θ. Στο $\triangle B\Gamma\Delta$: $\alpha^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ (1)
 —//— $\triangle B\Delta A$: $\gamma^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 \Leftrightarrow$

$$B\Delta^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 \quad (2)$$

Η (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \Rightarrow \alpha^2 = \gamma^2 + (\Delta\Gamma^2 - A\Delta^2)$$

$$\alpha^2 = \gamma^2 + (\Delta\Gamma - A\Delta)(\Delta\Gamma + A\Delta)$$



Σχήμα 10

Σημείωση (α):

$$A\Delta + \Delta\Gamma = b$$

$$a^2 = \gamma^2 + (\Delta\Gamma - A\Delta) \cdot b$$

$$a^2 = \gamma^2 + (A\Gamma - A\Delta - A\Delta) \cdot b$$

$$a^2 = \gamma^2 + (b - 2A\Delta) \cdot b$$

$$a^2 = \gamma^2 + b^2 - 2bA\Delta$$

$$a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2bA\Delta$$

Σημείωση (β): $A\Delta - \Delta\Gamma = b$

$$a^2 = \gamma^2 - b(A\Delta + \Delta\Gamma)$$

$$a^2 = \gamma^2 - b(A\Delta + A\Delta - A\Gamma)$$

$$a^2 = \gamma^2 - b(2A\Delta - b)$$

$$a^2 = \gamma^2 - 2bA\Delta + b^2$$

$$a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2bA\Delta$$