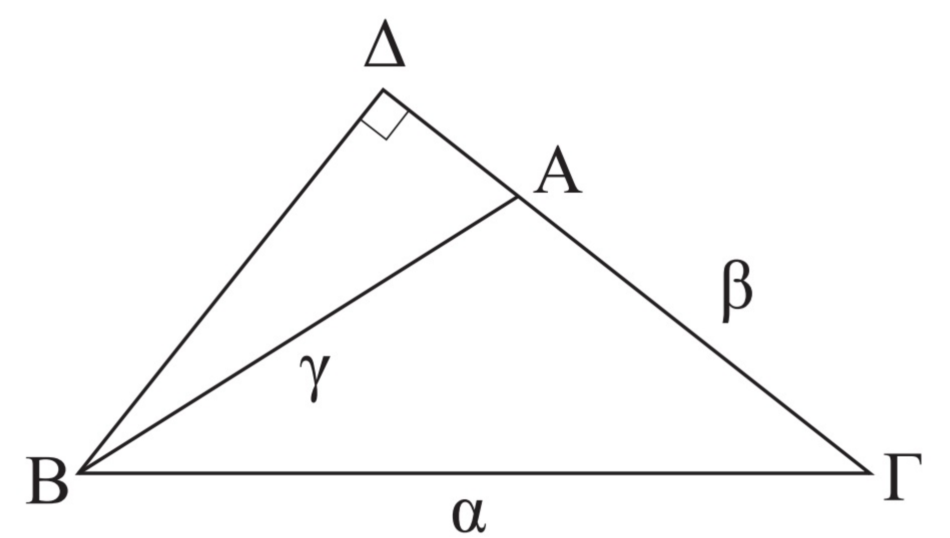
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{A} > 1L$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.}$$

<u>Απόδειξη:</u> $B\hat{\Delta}\Gamma$: $B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ (1)

$B\hat{\Delta}A$: $AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow$

$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2$ (2)

$$(1) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} B\Gamma^2 = AB^2 - A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = AB^2 + (\Gamma\Delta - A\Delta)(\Gamma\Delta + A\Delta)$$

$$a^2 = \gamma^2 + b\,(b + A\Delta + A\Delta) \Leftrightarrow$$

$$a^2 = \gamma^2 + b(b + 2A\Delta) \Leftrightarrow$$

$$a^2 = \gamma^2 + b^2 + 2bA\Delta$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 1\llcorner$,

ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 1\llcorner$,

iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 1\llcorner$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 8$, $\beta = 10$ και $\gamma = 7$, θα έχουμε $\beta^2 = 100$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 64 + 49 = 113$ δηλαδή $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{B} < 1\llcorner$ και επειδή η $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο.

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

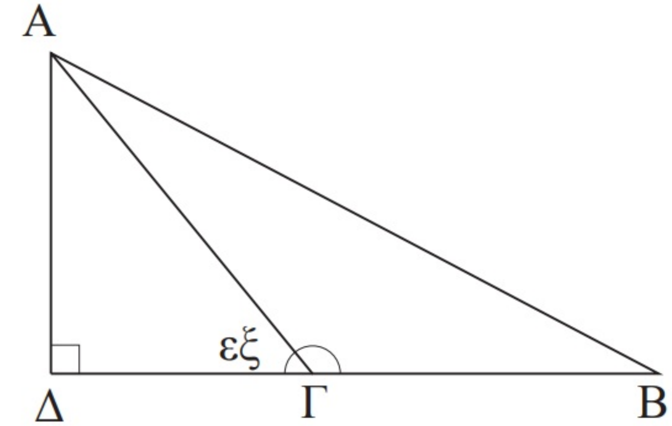
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο,

ii) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 12

Λύση

i) Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και επιπλέον ότι $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

ii) Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \Gamma\Delta \ (1).$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $A\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2 = \frac{\beta^2}{4}$, οπότε $A\Delta = \frac{\beta}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 30°$ και επομένως $\hat{\Gamma} = 150°$.