

Ασκήσεις στα θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

- Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει:
 $f^2(x) + g^2(x) = 2x[f(x) - g(x)] + x^6 - 2x^2 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $4f(\xi) + 5g(\xi) = 0$.
- Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 2]$, για την οποία ισχύει ότι:
 $f^3(x) - 3f^2(x) + 5f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5$, για κάθε $x \in [1, 2]$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = f(\rho - f(\rho))$.
- Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
 $f(0) + f(1) = g(0) + g(1)$
Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in [0, 1]$.
- Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f^2(\xi) + \xi^2 = 2f(\xi) + 3$.
- Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0, 4] \rightarrow [0, 4]$ για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις f_0g και g_0f στο $[0, 4]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 4]$ τέτοιο, ώστε $(f_0g)(\xi) + (g_0f)(\xi) = 2\xi$.
- Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1, 3]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(\xi + 2)$.
- Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) \cdot f(2) + a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0, 2]$
 - Υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $(\xi - 1)f(\xi) = \xi f(\xi + 1)$
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 \ln x - 3 \sin x + 4 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.
- Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 5$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(4)+3)x^2 - 3x + 1}{x + 5}$.
- Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(3) = -5$ και $-1, 4$ δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(0)x^3 + 2x + 5}{x^2 + 4}$.
- Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 10)$ και $f(5) = -4$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(2)x^4 - f(8)x^3 + 7x^2 + 5}{f(6)x^3 - x^2 + 5x - 9}$.
- Έστω συνάρτηση $f: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $f(2) = 2, f(3) = 3$ και $f^2(x) - 3f(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in (2, 3)$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.
- Έστω μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 3$ και $f(2) = 5$. Αν η εξίσωση $f(x) = 4$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.
- Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[-2, 8]$ Και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[-2, 3], [3, 5], [5, 8]$.
Αν $f(-2) = -2, f(3) = 4$ και $f(8) = 2$, να βρείτε:
 - Τη μονοτονία της f
 - Το σύνολο τιμών της f
 - Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[-2, 8]$

16. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 9$ για κάθε $x \in [-3,3]$.
- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$
 - Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = -3$
17. Να βρείτε τις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x) = x^2 + 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
18. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 2f(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = -1$
19. Δίνεται η ορισμένη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \kappa x + \lambda}{x^2 + \kappa}$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ολικό μέγιστο το 2 και ολικό ελάχιστο το 0. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 4$.
20. Αν η f είναι συνεχής και θετική στο $[6,8]$, να αποδείξετε ότι
- Η f έχει ελάχιστο m και μέγιστο M στο $[6,8]$.
 - $m^3 \leq f(6)f(7)f(8) \leq M^3$
 - Η εξίσωση $f(x)^3 - f(6)f(7)f(8) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[6,8]$
21. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}, x > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της
 - Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x = 1 - x$
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\theta \in (a, \beta)$, $a > 1$ τέτοιο ώστε $f^3(\theta) = f(a)f(\beta)f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)$
22. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1 - \ln x) = 2 - 2x - 2 \ln x, x > 0$
- Να βρείτε τον τύπο της f
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
 - Να βρείτε το πρόσημο της f
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
23. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln x + e^x + x - 1$
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x) = a$ έχει μοναδική ρίζα
 - Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = e$
 - Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $e^{\kappa^2+4} - e^{4\kappa} = \ln(4\kappa) - \ln(\kappa^2 + 4) + 4\kappa - \kappa^2 - 4$
24. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) + \sin x - 1 + x^2 \eta \mu \frac{1}{x} = 0$ για κάθε $x \neq 0$
- Να βρείτε τον τύπο της f
 - Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.
25. Έστω η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $[3,6]$ για την οποία ισχύει ότι:
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [3,6]$,
 - $f(3) > 0$ και
 - $f(3)f(4) = f(5)f(6)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [3,6]$
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1 \in [3,4]$ και $x_2 \in [5,6]$ τέτοια ώστε $(f(x_1))^2 = f(3)f(4)$ και $(f(x_2))^2 = f(5)f(6)$
 - Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.