Κατηγορία – Μέθοδος 8

Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

i. Διπλή ανισοτική σχέση

α. Μετατρέπουμε την ανισότητα σε $K < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \Lambda$

β. Αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση f και το διάστημα $[\alpha,\beta]$

γ. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,\beta]$ οδηγούμαστε στην ύπαρξη κάποιου $\xi \in (\alpha,\beta): f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $K < f'(\xi) < \Lambda$.

Η ισχύς της τελευταίας ανίσωσης προκύπτει είτε από απλές πράξεις είτε με χρήση της μονοτονίας της f' .

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι $1+\frac{1}{e+1} < \ell n(1+e) < 1+\frac{1}{e}$.

Λύση

Είναι $1+\frac{1}{e+1} < \ell n(1+e) < 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} < \ell n(1+e)-1 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} < \frac{\ell n(1+e)-\ell ne}{(1+e)-e} < \frac{1}{e}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ell nx$ με $x\in[e,1+e]$. Για την f ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ. .

Οπότε υπάρχει $\xi\in(e,1+e)$ με

$$f'(\xi)=\frac{f(1+e)-f(e)}{1+e-e} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{\ell n(1+e)-1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\ell n(1+e)-1$$

Επειδή $\xi\in(e,1+e)$ είναι $0<e<\xi<1+e \Leftrightarrow \frac{1}{e}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+e} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e}<\ell n(1+e)-1<\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$$1+\frac{1}{1+e}<\ell n(1+e)<1+\frac{1}{1+e}.$$

Παράδειγμα 2

Αν $0<\alpha<\beta$ να δειχθεί ότι: $(\alpha e)^{\beta-\alpha}<\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}<(\beta e)^{\beta-\alpha}$.

Λύση

Η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γίνεται: $(\beta-\alpha)\ell n(\alpha e)<\ell n\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}<(\beta-\alpha)\ell n(\beta e) \Leftrightarrow$

$$(\beta-\alpha)\ell n(\alpha e)<\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha<(\beta-\alpha)\ell n(\beta e) \Leftrightarrow \ell n(\alpha e)<\frac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}<\ell n(\beta e) \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x\ell nx$, $x\in[\alpha,\beta]$, με $f'(x)=\ell nx+1$.

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow 1+\ell n\xi=\frac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \ell n(\xi e)=\frac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}$$

Αλλά $\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow \alpha e<e\xi<\beta e \overset{\ell nx\uparrow}{\Leftrightarrow} \ell n(\alpha e)<\ell n(\xi e)<\ell n(\beta e) \Leftrightarrow$

$$\ell n(\alpha e)<\frac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}<\ell n(\beta e) \Leftrightarrow (\alpha e)^{\beta-\alpha}<\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}<(\beta e)^{\beta-\alpha} \quad (1)$$

Κατηγορία – Μέθοδος 9

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή, σ' ένα διάστημα Δ. Δείχνουμε ότι είναι συνεχής σε διάστημα και για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος, η παράγωγος υπάρχει και είναι μηδέν.

Κατηγορία – Μέθοδος 10

Εύρεση του τύπου συνάρτησης $f(x)$ με την επίλυση εξίσωσης στην οποία υπάρχουν και η $f(x)$ αλλά και η $f'(x)$.

Εκμεταλλευόμαστε κατάλληλα τα συμπεράσματα των παρακάτω προτάσεων

1. Αν $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c, c \in \mathbb{R}$ και $x \in \Delta$ (Δ διάστημα)

2. Αν $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c, c \in \mathbb{R}$ και $x \in \Delta$ (Δ διάστημα)

3. Αν $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}$ και $x \in \Delta$.

Δίνουμε ένα πίνακα ενδεικτικών παραδειγμάτων:

Ζητάμε συνάρτηση f για την οποία ισχύει	**Θεωρούμε συνάρτηση g που από την συνθήκη θα είναι $g'(x) = 0$**	**Βρίσκουμε τον τύπο της f**
$f'(x) = c \cdot f(x)$ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: $f'(x) = h'(x) \cdot f(x)$	$g(x) = e^{-cx} \cdot f(x)$ $g(x) = e^{-h(x)} \cdot f(x)$	$f(x) = k \cdot e^{cx}$ $f(x) = k \cdot e^{h(x)}$
$f'(x) \cdot (x - c) = f(x)$	$g(x) = \frac{f(x)}{x-c}$	$f(x) = k \cdot (x - c)$
$f'(x) \cdot (c - x) = f(x)$	$g(x) = (x - c) \cdot f(x)$	$f(x) = \frac{k}{x-c}$
$x \cdot f'(x) = v \cdot f(x)$	$g(x) = \frac{f(x)}{x^v}$	$f(x) = k \cdot x^v$

Παράδειγμα

Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)(\kappa - x) = f(x)$, $x \neq \kappa$.

Λύση

Είναι: $f'(x)(\kappa - x) - f(x) = 0$ ή $f'(x)(\kappa - x) + (\kappa - x)' f(x) = 0$ ή $[f(x)(\kappa - x)]' = 0$

Άρα η $g(x) = f(x)(\kappa - x) = c \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{c}{\kappa - x}$ για κάθε $x \neq \kappa$, $c \in R$.