Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών συνάρτησης σε ένα διάστημα (α, β) ή στο πεδίο ορισμού της βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης και χρησιμοποιούμε γνωστό θεώρημα από το κεφάλαιο της συνέχειας που αφορά στο σύνολο τιμών.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα σε ένα διάστημα, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο συγκεκριμένο διάστημα και στη συνέχεια δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη** σ' αυτό το διάστημα.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ αντίστοιχα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και θα αποδείξουμε ότι έχει μοναδική ρίζα.

Είναι $h'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και συνεπώς έχει πεδίο τιμών το διάστημα $\left(\lim_{x \to 0^+} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$, διότι: $\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = (-\infty - \infty) = -\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = +\infty - 0 = +\infty$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών που είναι το $(-\infty, +\infty)$ η $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Απο τα παραπάνω λοιπόν συμπαιρένουμε ότι υπάρχει μοναδικό ξ στο $(0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής : $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) \leq g(x)$ θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ και από τη μονοτονία και τα ακρότατα της h προκύπτει η ισχύς της προς απόδειξη ανισότητας .

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι : $e^x \geq 1 - \ln(x+1)$, **για κάθε** $x \geq 0$

Λύση

Θέτουμε $h(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$, $x \geq 0$.

Είναι $h'(x) = \left(e^x - 1 + \ln(x+1)\right)' = e^x + \dfrac{1}{x+1} > 0$, για κάθε $x \geq 0$ που σημαίνει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Επομένως , αν $x \geq 0$ έχουμε : $h(x) \geq h(0) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 + \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 - \ln(x+1)$