Κατηγορία – Μέθοδος 5

Αν έχουμε ως προϋπόθεση ότι ισχύει μια ανισοτική σχέση όπως για παράδειγμα $f(x) \geq a$ ή $f(x) \leq a$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια παράμετρο, βρίσκουμε x_0 τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = a$, οπότε από τη σχέση $f(x) \geq a = f(x_0)$ ή $f(x) \leq a = f(x_0)$ και σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat , προκύπτει $f'(x_0) = 0$.

Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη παράμετρο.

Παράδειγμα

Αν $\alpha^x + 5^x \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{5}$.

Λύση

Αν θέσουμε $f(x) = \alpha^x + 5^x$ έχουμε :

$f(x) = \alpha^x + 5^x \geq 2 = f(0)$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 2 στη θέση $x = 0$, οπότε

σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι : $f'(0) = 0$.

Επειδή $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha + 5^x \ln 5$ παίρνουμε :

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha + 5^0 \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha + \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha 5) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow \alpha 5 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όταν ζητείται τιμή μιας παραμέτρου ώστε μία συνάρτηση να παρουσιάζει f ακρότατο σε μια θέση , έστω x_0, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat πρέπει $f'(x_0) = 0$. Από τη συνθήκη αυτή προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου.

Επειδή η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ είναι αναγκαία και όχι ικανή πρέπει να γίνεται επαλήθευση με τον πίνακα μονοτονίας, δηλαδή να ελέγχουμε αν η παράγωγος αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, οπότε το x_0 είναι πράγματι θέση ακρότατου.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \frac{\beta \ln x}{\sqrt{x}},\ x > 0$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x = 1$ με $f(1) = -2$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και αφού το 1 είναι εσωτερικό του διαστήματος $(0, +\infty)$ σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat είναι $f'(1) = 0$.

Έχουμε: $f'(x) = \left(\alpha\sqrt{x} + \frac{\beta \ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\alpha x + 2\beta - \beta \ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x > 0$

Άρα $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 2\beta - \beta \ln 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 0 \qquad (1)$

Επίσης έχουμε $f(1) = -2 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{1} + \frac{\beta \ln 1}{\sqrt{1}} = -2 \Leftrightarrow \alpha = -2 \quad (2)$

Απο τις (1) και (2) παίρνουμε $\alpha = -2$ και $\beta = 1$.

Για τις τιμές αυτές είναι $f'(x) = \frac{2 - 2x - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x > 0$ και πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του 1.

Το πρόσημο της f' εξαρτάται απο το πρόσημο του αριθμητή , αφού $x > 0$.

Θέτουμε $g(x) = 2 - 2x - \ln x$, $x > 0$ και θα μελετήσουμε το πρόσημο της g.

Είναι $g'(x) = -2 - \frac{1}{x} < 0$, για κάθε $x > 0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, με $g(1) = 0$. Οπότε αν $x > 1 \Leftrightarrow g(x) < g(1) = 0$, ενώ αν $x < 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) = 0$ που σημαίνει ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 για τις τιμές των α και β που βρήκαμε και μάλιστα παρουσιάζει στη θέση αυτή τοπικό μέγιστο (που είναι και ολικό μέγιστο).

Άσκηση 1

Για τους διάφορους του μηδέν αριθμούς α, β, γ ισχύει: $3\beta^2 - 4\alpha\gamma \le 0$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 3\beta x^2 + 4\gamma x + 5$, $x \in R$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Λύση

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με : $f'(x) = 3\alpha x^3 - 6\beta x^2 + 4\gamma$.
Η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι εξίσωση β΄ βαθμού (ως προς x) και έχει:

$\Delta = 36\beta^2 - 48\alpha\gamma = 12(3\beta^2 - 4\alpha\gamma) \le 0$ (από υπόθεση)

Αυτό σημαίνει ότι: η εξίσωση $f'(x) = 0$ ή δεν έχει πραγματικές ρίζες $(\Delta < 0)$ ή αν έχει, τότε είναι μία διπλή $(\Delta = 0)$, οπότε εκατέρωθεν αυτής η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.
Έτσι σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = xe^x - \alpha$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να προσδιοριστεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$.

Λύση

i. Είναι $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
Άρα έχουμε για την f τον πίνακα μεταβολών

Η f παρουσιάζει στη θέση $x = -1$ τοπικό (και ολικό) ελάχιστο, το $f(-1) = -\frac{1}{e} - \alpha$

ii. Αν $-\frac{1}{e} - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{e}$ τότε προφανώς $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Αν $-\frac{1}{e} - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{e}$ τότε η $x = -1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (η ρίζα σε αυτήν την περίπτωση είναι διπλή).

Αν $-\frac{1}{e} - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{e}$ τότε:

Στο διάστημα $(-\infty, -1]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα με $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\alpha > 0$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $[-1, +\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα με $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Συνολικά δηλαδή η f έχει ακριβώς δύο ρίζες αν $\alpha > -\frac{1}{e}$.

Άσκηση 3

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $-1 < x < 0$ ή $x > 0$ ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$.

Είναι $f'(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$

Για $-1 < x < 0$ προφανώς ισχύει $f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[-1,0]$ είναι η $f(0) = 0$ και συνεπώς $f(x) > f(0)$ για κάθε $x \in (-1,0)$ δηλαδή $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$ για κάθε $x \in (-1,0)$.

Για $x > 0$ ισχύει $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,+\infty)$ είναι η $f(0) = 0$ και συνεπώς $f(x) > f(0)$ για κάθε $x > 0$ δηλαδή $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$ για κάθε $x > 0$.