ΘΕΜΑ Β

1. Είναι $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ και $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

Έστω $x_1, x_2 < -1$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow$

$1 + \dfrac{1}{x_1+1} > 1 + \dfrac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$. Όμοια η η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, +\infty)$. Η f είναι συνεχής οπότε έχει σύνολο τιμών $f(A) = f((-\infty,-1)) \cup f((-1,+\infty)) = \mathbb{R} - \{1\}$ αφού

$f((-\infty,-1)) \overset{f\searrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to -1^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right) = (-\infty, 1)$.

Είναι $f((-\infty,-1)) \cap f((-1,+\infty)) = \varnothing$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1), (-1,+\infty)$ άρα η f είναι $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x+1} = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} = y - 1 \Leftrightarrow$

$x + 1 = \dfrac{1}{y-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y-1} - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{2-y}{y-1}$ οπότε $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{x-1},\ x \neq 1$.

$A_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R} - \{1\}$.

3. Είναι $f(x) = \ln x \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+1} = \ln x \Leftrightarrow (x+1)\ln x = x + 2 \Leftrightarrow$

$(x+1)\ln x - x - 2 = 0$. Έστω $g(x) = (x+1)\ln x - x - 2,\ x > 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ οπότε $g(x) < 0$ κοντά στο 0 από δεξιά άρα υπάρχει α>0 τέτοιο ώστε $g(\alpha) < 0$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x \cdot \left(\dfrac{(x+1)\ln x}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)\right] =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x \cdot \left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\ln x - 1 - \dfrac{2}{x}\right)\right] = +\infty \cdot (+\infty - 1) = +\infty$, οπότε $g(x) > 0$ κοντά στο $+\infty$ άρα υπάρχει β> α>0 τέτοιο ώστε $g(\beta) > 0$. Επομένως $g(\alpha)\cdot g(\beta) < 0$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \ln x_0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \ln x$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0 οπότε $\alpha = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2023 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2023 - 1 = 2022$. Συνεπώς $\alpha = 2022$.

β) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(2023 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2023 - 0 = 2023$, αφού για $x \neq 0$ είναι

$|\eta\mu x| \le 1 \Rightarrow \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Rightarrow \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = 0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

γ) Αφού $f(0) = 2022$ ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = 2022$.

Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = 2022 \Leftrightarrow 2023 - \frac{\eta\mu x}{x} = 2022 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = x$ που είναι αδύνατη για $x \neq 0$.

Συνεπώς η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 2022$ είναι η $x = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε: $g(f(x)) = |\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow \sqrt{1 - f^2(x)} = |\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$

$$f^2(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\eta\mu x| \quad (1)$$

ii. Για τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ ισχύει ότι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + 0 \\ x = 2\kappa\pi + \pi - 0 \end{cases}, \kappa \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi \\ x = (2\kappa + 1)\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \lambda\pi, \lambda \in Z.$$

Επειδή όμως η f είναι ορισμένη στο $[0, \pi]$, τότε έχουμε: $0 \le \lambda\pi \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \lambda \le 1$.

Επομένως είναι $x = 0$ ή $x = \pi$.

β) Ως γνωστόν, αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0, \pi)$, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Επειδή όμως $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $f(0) = f(\pi) = 0$, από την (1) έχουμε ισοδύναμα ότι

$$f(x) = \eta\mu x, x \in [0, \pi] \ \text{ή} \ f(x) = -\eta\mu x, x \in [0, \pi].$$

Αλλά $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, επομένως η ζητούμενη συνάρτηση, είναι η

$$f(x) = \eta\mu x, x \in [0, \pi].$$

γ) Είναι $h(x) = \frac{1}{\eta\mu x - x}, x \in (0, \pi]$.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to 0} (\eta\mu x - x) = 0$$

Είναι γνωστό ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Επειδή $x \in (0, \pi]$, είναι $\eta\mu x \geq 0$ και $x > 0$, επομένως έχουμε:

$$\eta\mu x < x \Leftrightarrow \eta\mu x - x < 0.$$

Άρα

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\eta\mu x - x} = -\infty$$