

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Εύρεση ορίου με δεδομένο την παραγωγισιμότητα της f σε κάποιο θέση $x = a$.

Για την άρση της απροσδιοριστίας που προκύπτει προσπαθούμε να εμφανίσουμε τα όρια $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (αφού η f ως παραγωγίσιμη στο $x = a$ είναι και συνεχής στο a)

και $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ κάνοντας, όπου χρειάζεται, αλλαγή μεταβλητής.

Παράδειγμα 1

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a να δείξετε ότι το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} + a \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f(a) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x f(a) - \cancel{a f(x)} + \cancel{a f(x)} - a f(a)}{x - a} = f(a) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a)(\cancel{x - a})}{\cancel{x - a}} = f(a) \Leftrightarrow f(a) = f(a) \text{ που ισχύει.}$$

Παράδειγμα 2

Έστω f παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\text{i. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} = af'(x), \text{ με } a \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Θεωρώ } u = a \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{u}{a}$$

όταν $h \rightarrow 0$, τότε $u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} &= \lim_{u \rightarrow 0} a \cdot \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = \\ &= a \cdot f'(x) \end{aligned}$$