

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες (κατακόρυφες, οριζόντιες, πλάγιες) αν υπάρχουν των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{3x^3 + x + 2}{x^2}$

4) i) $f(x) = \frac{3x^3 + x + 2}{x^2}$ $A_f = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x + 2}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x + 2}{x^3} = 3 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x + 2 - 3x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^2} = 0$$

$y = 3x$ ασύμπτωτη στο $+\infty$

ομοίως στο $-\infty$

και $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x}$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x}$, $A_f = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{x} = 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{|x| \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} =$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

$y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = 1 \text{ (όμοια με πριν)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{|x| \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$