

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β' ΟΜΑΔΑΣ (Σελ. 151 - 152)

4. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1,$$

τότε η f δεν έχει ακρότατα.

Επειδή η f παραγωγίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$, τα ακρότατα αυτής θα αναζητηθούν μόνο μεταξύ των ριζών της $f'(x) = 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$6(f(x))^2 f'(x) + 6f'(x) = 6x^2 + 6 \Leftrightarrow f'(x)[(f(x))^2 + 1] = x^2 + 1 > 0.$$

Επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2(x - \gamma)^2, \text{ με } \alpha < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta)^2(x - \gamma)^2 + (x - \alpha)^2 \cdot 2(x - \beta)(x - \gamma)^2 + (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 2(x - \gamma).$$

Προφανώς

$$f'(\alpha) = f'(\beta) = f'(\gamma) = 0. \quad (1)$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, αφού

- είναι συνεχής σ' αυτά ως πολυωνυμική,
- παραγωγίσιμη στα (α, β) και (β, γ) και
- $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$.

Επομένως, υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$. Από (1) και (2) προκύπτει ότι η f' έχει πέντε τουλάχιστον ρίζες τις $\alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$. Επειδή η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική έκτου βαθμού, η παράγωγός της είναι πέμπτου βαθμού. Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει άλλες, εκτός από τις $\alpha, \xi_1, \beta, \xi_2, \gamma$ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα.

x	$-\infty$	α	ξ_1	β	ξ_2	γ	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

Άρα η f έχει τρία τοπικά ελάχιστα τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ και $f(\gamma)$ και δύο τοπικά μέγιστα τα $f(\xi_1)$ και $f(\xi_2)$.