Κατηγορία – Μέθοδος 5
Ασκήσεις που ζητείται η **ύπαρξη** μιας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης σε **ανοικτό** διάστημα (α, β). Τότε:
α. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν).
β. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος.
γ. Θέτουμε το 1ο μέλος ίσο με μια συνάρτηση.
δ. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση που θεωρήσαμε.
Για την μοναδικότητα της ρίζας εφόσον ζητείται:
Αποδεικνύουμε ή ότι είναι “1 - 1” ή ότι είναι γνησίως μονότονη ή εργαζόμαστε με απαγωγή σε άτοπο.

Παράδειγμα:

Ν.δ.ο: η $\dfrac{x^{2004}+2004}{x-3}+\dfrac{x^{2003}-2003}{x-4}=0$ (1) έχει 1 τουλ. ρίζα στο $(3,4)$

Για $x\neq 3, x\neq 4$ η (1) γράφεται:

$$(x-4)\cdot(x^{2004}+2004)+(x-3)(x^{2003}-2003)=0$$

Θεωρώ συνάρτηση $f(x)=(x-4)\underbrace{(x^{2004}+2004)}_{+}+(x-3)\underbrace{(x^{2003}+2003)}_{+}$

$f(3)<0$, $f(4)>0$

Άρα $f(3)\cdot f(4)<0$, f : συνεχής

Συνεπώς από Θ.Β. υπάρχει τουλ. 1 ρίζα της (1) στο $(3,4)$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Ασκήσεις που ζητείται η **ύπαρξη** μιας τουλάχιστον ρίζας μιας εξίσωσης σε **κλειστό** διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε: Επαναλαμβάνουμε τα βήματα α, β, γ, της μεθόδου 1.

Αν στο βήμα δ προκύπτει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\leq 0$ τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει από Θ.Β. ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.
- αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$, τότε $f(\alpha)=0$ οπότε $x_0=\alpha$ ή $f(\beta)=0$ οπότε $x_0=\beta$ αν δεν υπάρχουν αντίθετοι περιορισμοί.

Οπότε, τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[a,\beta]$ ώστε $f(x_0)=0$.

Παράδειγμα:

Ν.δ.ο. η $x^3+3x-\lambda=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$, για κάθε $\lambda\in[0,4]$.

Θεωρώ $f(x)=x^3+3x-\lambda$, f: συνεχής στο $[0,1]$

$f(0)=-\lambda\leq 0$

$f(1)=4-\lambda\geq 0$

$f(0)\cdot f(1)\leq 0$

Αν $f(0)\cdot f(1)<0$ τότε η $f(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Αν $f(0)\cdot f(1)=0 \Longleftrightarrow f(0)=0$ ή $f(1)=0$
που σημαίνει ότι η $f(x)=0$ έχει ρίζα
το 0 ή το 1 αντίστοιχα

Συνεπώς η f έχει μία τουλ. ρίζα στο $[0,1]$

Κατηγορία – Μέθοδος 7
α. Ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη σημείου τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τον άξονα $x'x$, τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση που δίνεται.
β. Ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f, g , τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση h με τύπο: $h(x) = f(x) - g(x)$.