8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM.

i) Έστω $M(x, f(x))$ το ζητούμενο σημείο της C_f.
Έχουμε

$$(MA)^2=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+(f(x))^2=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+x.$$

Η απόσταση MA γίνεται ελάχιστη, όταν γίνει ελάχιστο το τετράγωνό της, δηλαδή όταν πάρει την ελάχιστη τιμή της η συνάρτηση

$$g(x)=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+x,\quad x\in[0,+\infty).$$

Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $g'(x)=2\left(x-\frac{9}{2}\right)+1=2x-8$, οπότε

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=4.$$

Το πρόσημο της g', η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{17}{4}$	$\nearrow$	

Δηλαδή η g παρουσιάζει στο $x=4$ ελάχιστο το $g(4)=\frac{17}{4}$. Επομένως η ποσότητα $(AM)^2$ και άρα η (AM) γίνεται ελάχιστη όταν $x=4$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(4,2)$.

ii) Για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε στο σημείο $M(4,2)$ είναι $\lambda_\varepsilon=f'(4)=\frac{1}{4}$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της AM είναι:

$$\lambda_{AM}=\frac{2-0}{4-\frac{9}{2}}=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-4.$$

Επομένως, $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{AM}=\frac{1}{4}(-4)=-1$, που σημαίνει ότι η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην AM.