

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM .

i) Έστω $M(x, f(x))$ το ζητούμενο σημείο της C_f .

Έχουμε

$$(MA)^2 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (f(x))^2 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + x.$$

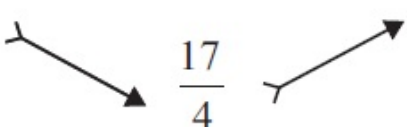
Η απόσταση MA γίνεται ελάχιστη, όταν γίνει ελάχιστο το τετράγωνό της, δηλαδή όταν πάρει την ελάχιστη τιμή της η συνάρτηση

$$g(x) = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει $g'(x) = 2\left(x - \frac{9}{2}\right) + 1 = 2x - 8$, οπότε

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Το πρόσημο της g' , η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	4	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Δηλαδή η g παρουσιάζει στο $x = 4$ ελάχιστο το $g(4) = \frac{17}{4}$. Επομένως η ποσότητα $(AM)^2$ και άρα η (AM) γίνεται ελάχιστη όταν $x = 4$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(4, 2)$.

ii) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε στο σημείο $M(4, 2)$ είναι $\lambda_\varepsilon = f'(4) = \frac{1}{4}$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της AM είναι:

$$\lambda_{AM} = \frac{2-0}{4-\frac{9}{2}} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4.$$

Επομένως, $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AM} = \frac{1}{4}(-4) = -1$, που σημαίνει ότι η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην AM .