ii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f^2(x+4h)-f^2(x-h)}{h} = 10f(x)\cdot f'(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+4h)-f^2(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+4h)-f(x-h)}{h}\left[f(x+4h)+f(x-h)\right] =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left[f(x+4h)-f(x)\right]-\left[f(x-h)-f(x)\right]}{h}\cdot\left[f(x+4h)+f(x)\right] =$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+4h)-f(x)}{h} - \frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right]\cdot\left[f(x+4h)+f(x)\right] = \left[4f'(x)-(-f'(x))\right]\cdot 2f(x)$$

$$= 5f'(x)\cdot 2f(x) = 10f'(x)\cdot f(x)$$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Για την εύρεση παραγώγου με δεδομένη ανισοτική σχέση με κατάλληλους μετασχηματισμούς στην ανισοτική σχέση “παγιδεύουμε” το πηλίκο των διαφορών $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ή $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ μεταξύ δύο συναρτήσεων που έχουν το ίδιο όριο και αξιοποιούμε το **Κριτήριο της Παρεμβολής**.

Παράδειγμα 1

$f(x)-2y^3 \le f(x+y) \le f(x)+2y^3$. Ν.δ.ο. f: παραγωγίσιμη.

$f(x)-2y^3 \le f(x+y) \le f(x)+2y^3 \Leftrightarrow$
$-2y^3 \le f(x+y)-f(x) \le 2y^3 \quad (1)$

Θεωρώ $h=y$ και η (1) γίνεται: $-2h^3 \le f(x+h)-f(x) \le 2h^3$ (2)

από τη σχέση (2) έχουμε $-2h^3 \le 2h^3 \Leftrightarrow -h^3 \le h^3 \Leftrightarrow$

$2h^3 \geq 0 \Leftrightarrow h \geq 0$

Για $h>0$ η (1) γράφεται: $-2h^2 \le \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \le 2h^2$

Ισχύει: $\lim\limits_{h\to 0}(-2h^2)=0$, $\lim\limits_{h\to 0}(2h^2)=0$, άρα από

κρ. παρεμβολής: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

που σημαίνει ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f

είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτηση- Κανόνες παραγώγισης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Παράγωγος συνάρτησης - κανόνες παραγώγισης

Ορισμός

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του A.
- Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
- Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει:
  $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$

Ορισμός

- Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

  $$f': A_1 \to \mathbb{R}$$
  $$x \to f'(x)$$

  η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f**. Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται «ντε εφ προς ντε χι».
  Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και $y = (f(x))'$
- Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''.
  Επαγωγικά ορίζεται η νιοστή παράγωγος της f, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$
  Δηλαδή $f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)}\right]', \nu \geq 3$