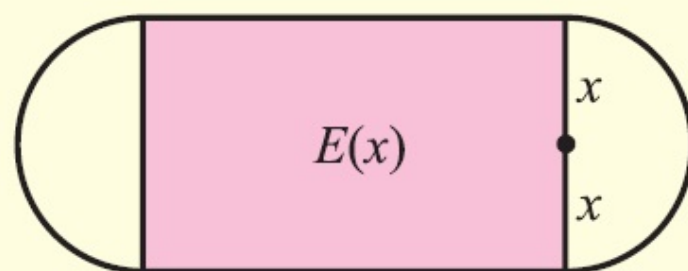


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β' ΟΜΑΔΑΣ (Σελ. 152)

9. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



Έστω $(AB) = 2x$ και $(B\Gamma) = y$ οι διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. Τότε η περίμετρος του στίβου θα είναι ίση με $2\pi x + 2y$ και επομένως θα ισχύει

$$2\pi x + 2y = 400 \Leftrightarrow y = 200 - \pi x.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι

$$E(x) = 2x \cdot y = 2x(200 - \pi x) = -2\pi x^2 + 400x.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{200}{\pi}\right)$ είναι $E'(x) = -4\pi x + 400$, οπότε

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{100}{\pi}.$$

Το πρόσημο της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{100}{\pi}$	$+\infty$
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$			

Δηλαδή η E παρουσιάζει στο $x = \frac{100}{\pi}$ μέγιστο το $E\left(\frac{100}{\pi}\right) = \frac{20.000}{\pi}$.

Επομένως, το ορθογώνιο τμήμα του στίβου γίνεται μέγιστο, όταν οι διαστάσεις του είναι:

$$(AB) = 2 \cdot \frac{100}{\pi} = \frac{200}{\pi} \text{ m και } (B\Gamma) = 200 - \pi \cdot \frac{100}{\pi} = 100 \text{ m.}$$

Κυρτότητα - Σημεία καμπής συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμοί

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Λέμε ότι :

Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα πάνω** στο Δ ή ότι είναι «**κυρτή**» στο Δ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα κάτω** στο Δ ή ότι είναι «**κοίλη**» στο Δ αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε το $f''(x) = 0$.

Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος, **πιθανά σημεία καμπής** είναι τα σημεία στα οποία **μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος**.

Είναι φανερό ότι σημεία καμπής έχουμε και σε σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού η εφαπτομένη στα σημεία αυτά είναι κατακόρυφη.

Έτσι **πιθανά σημεία καμπής** είναι και τα σημεία στα οποία **δεν υπάρχει η $f''(x)$** αλλά η C_f δέχεται εφαπτομένη.

Επομένως για να εντοπίσουμε τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης f βρίσκουμε :

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται και

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η $f''(x)$.

Είναι σημείο καμπής κάποιο από τα παραπάνω αναφερόμενα σημεία αν:

Υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό και αν αλλάζει πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του σημείου αυτού.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- i. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.
- iii. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f''(x)$.
- iv. Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της $f''(x)$.

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Λύση

Πρέπει $x^2 + 1 > 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ και}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f''(x) = 0$.

$$\text{Έχουμε } \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Το πρόσημο της $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ εξαρτάται μόνο από το $1 - x^2$, δηλ.

$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$-$	0	$+$	0	$-$

και έχουμε:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''(x)	-	0	+	0	-
f					

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -1]$, κυρτή στο $[-1, 1]$ και κοίλη στο $[1, +\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα: $(-1, f(-1))$ και $(1, f(1))$ δηλαδή τα $(-1, \ln 2)$ και $(1, \ln 2)$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 - 2, & x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 13, & x > 1 \end{cases}$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση

Για $x < 1$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 12x$

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 18x$

Στη θέση $x_0 = 1$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 - 2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 - 7}{x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x^2 + 7x + 7)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 7x + 7) = 15 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 9x^2 + 13 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 9x^2 + 8}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 - 8x - 8)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 8x - 8) = -15$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 1$ και η παράγωγος έχει τύπο:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 12x, & x < 1 \\ 3x^2 - 18x, & x > 1 \end{cases}$$

Για την $f''(x)$ έχουμε:

$$\text{Για } x < 1 \text{ είναι } f''(x) = (3x^2 + 12x)' = 6x + 12$$

$$\text{Για } x > 1 \text{ είναι } f''(x) = (3x^2 - 18x)' = 6x - 18$$

$$\text{Άρα } f''(x) = \begin{cases} 6x + 12, & x < 1 \\ 6x - 18, & x > 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της $f''(x)$

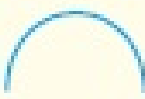
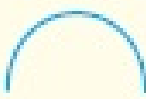
$$\text{Για } x < 1 : f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2. \text{ Άρα}$$

x	$-\infty$	-2	1
$f''(x)$	-	0	+

$$\text{Για } x > 1 : f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3. \text{ Άρα}$$

x	1	3	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών για την f'' .

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
f''(x)	-	0	+	-	0	+
f(x)						

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -2]$, είναι κυρτή στο $[-2, 1]$, είναι κοίλη στο $[1, 3]$ και κυρτή στο $[3, +\infty)$. Σημεία καμπής έχει τα: $(-2, f(-2))$ ή $(-2, 14)$ και στο $(3, f(3))$ ή $(3, -41)$.

Προσοχή!

Στο $x_0 = 1$ δεν έχει σημείο καμπής γιατί δεν υπάρχει η $f'(1)$ οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση δεν έχει σημεία καμπής αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

Παράδειγμα

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2ax^3}{3} + \left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x^2 + (a^3 + 7)x - 5a^2$.

Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Η $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2ax^3}{3} + \left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x^2 + (a^3 + 7)x - 5a^2$ επειδή είναι πολυωνυμική είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2ax^2 + 2\left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x + a^3 + 7 \text{ και}$$

$$f''(x) = 4x^2 + 4ax + 2\left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f''(x) = 4x^2 + 4ax + 2a^2 - 4a + 5$$

Επειδή η $f''(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού το πρόσημό της εξαρτάται από την τιμή της

$$\begin{aligned} \text{διακρίνουσας είναι: } \Delta_x &= (4a)^2 - 16(2a^2 - 4a + 5) \Leftrightarrow \Delta = 16a^2 - 16(2a^2 - 4a + 5) = \\ &= -16(-a^2 + 2a^2 - 4a + 5) \Leftrightarrow \Delta = -16(a^2 - 4a + 5) \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $a^2 - 4a + 5$ έχει $\Delta_a = 16 - 20 = -4 < 0$ οπότε είναι πάντοτε θετικό δηλ. $a^2 - 4a + 5 > 0$ (ομόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου). Άρα η $\Delta_x < 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.