

Κανόνες παραγωγίσιμης

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f \cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f \cdot g)'(x_0) = (f)'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- Αν $c \in \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $cf'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

- Αν $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με
 $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$

Γενικά ισχύει: $(x^\kappa)' = \kappa \cdot x^{\kappa-1}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$.

Επίσης με τον κανόνα του πηλίκου εύκολα προκύπτουν :

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\nu^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} - \{x | \sigma\nu x = 0\})$$

$$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\})$$

Σχόλια

1. Αν η $(f + g)$ είναι παραγωγίσιμη στο A , αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά οι f, g είναι συγχρόνως και οι δύο παραγωγίσιμες στο A .
2. Επίσης, μπορεί η $|f|$ να είναι παραγωγίσιμη στο A , χωρίς κατ' ανάγκη η f να είναι παραγωγίσιμη.
3. Αν μία μόνο από τις f, g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η $(f + g)$ και η $(f - g)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
4. Δεν ισχύει το ίδιο όμως για την $(f \cdot g)$. Αν κάποια από τις δύο δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο δεν βγάζουμε άμεσα συμπέρασμα για την παράγωγο του γινομένου.

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

• Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεση της g με την f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

• Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$ με την $g(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο A και την $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $g(A)$. Η $h = f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο A με $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ ή

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

όπου $u = g(x)$. (Κανόνας αλυσίδας).

- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

$$f(x) = 2\varepsilon\phi x + \sigma\phi x - 1$$

$$f'(x) = (2\varepsilon\phi x + \sigma\phi x - 1)' = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} + \ln x$$

$$f'(x) = (\sqrt{x} + \ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = -x^3 + \eta\mu x + \sqrt{x}$$

$$f'(x) = (-x^3 + \eta\mu x + \sqrt{x})' = -3x^2 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 \ln x$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \ln x \right)' = \frac{4x^3}{4} - \left(2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \right) = x^3 - 2x \ln x - x$$

$$f(x) = (x^3 - 2) \ln x$$

$$f'(x) = \left((x^3 - 2) \ln x \right)' = 3x^2 \ln x + (x^3 - 2) \cdot \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} \cdot \eta\mu x \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 1) - (x^2 + 1)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$\frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{e^x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot e^x - \ln x (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{x} e^x - \ln x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)}{(e^x)^2} =$$

$$\frac{\frac{1 - x \ln x}{x}}{e^x} = \frac{1 - x \ln x}{x \cdot e^x}$$

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x + 1)' (e^x - 1) - (e^x + 1)(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x (e^x - 1) - e^x (e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} =$$

$$\frac{e^x (e^x - 1 - e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$$

$$f'(x) = \left(\ln(\sqrt{x} + 1) \right)' = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} (\sqrt{x} + 1)' = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$$

$$f(x) = 5\eta\mu^3 x + 1$$

$$f'(x) = (5\eta\mu^3 x + 1)' = 15\eta\mu^2 x \cdot (\eta\mu x)' = 15\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$f(x) = e^{x^2+1}$$

$$f'(x) = \left(e^{x^2+1} \right)' = e^{x^2+1} \cdot (x^2 + 1)' = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$$

$$\text{ii. } f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$$

$$\text{iii. } f(x) = \sqrt[6]{3x - 2}$$

Το παράδειγμα 5 να το δουλέψετε μόνοι σας για εξάσκηση.