

## Παράδειγμα 2:

$f: [-a, a] \rightarrow [-a, a]$ : συνεχής

Ν.δ.ο υπάρχει  $\pm$  τουλάχιστον  $x_0 \in [-a, a]$ :  $f(x_0) = x_0$

Θεωρώ  $g(x) = f(x) - x$ : συνεχής στο  $[-a, a]$

$$g(-a) = f(-a) + a \geq 0$$

$$g(a) = f(a) - a \leq 0$$

$g(-a) \cdot g(a) \leq 0$ . Αν  $g(-a) \cdot g(a) < 0$  τότε από ι.β. υπάρχει

$$x_0 \in (-a, a): g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

$$\text{Αν } g(-a) \cdot g(a) = 0 \Leftrightarrow \{g(-a) = 0 \text{ ή } g(a) = 0\} \Leftrightarrow \{f(-a) = -a \text{ ή } f(a) = a\}$$

$$\begin{aligned} f(-a) &\geq -a \\ f(-a) + a &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a) &\leq a \Leftrightarrow \\ f(a) - a &\leq 0 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε υπάρχει 1 τουλάχιστον  $x_0 \in [-a, a] : f(x_0) = x_0$

### Παράδειγμα 3

$f$ : συνεχής στο  $[1, 2]$ ,  $f(1) = f(2)$

Ν.δ.ο: υπάρχει  $\vartheta \in [1, \frac{3}{2}] : f(\vartheta) = f(\vartheta + \frac{1}{2})$

Θεωρούμε συνάρτηση  $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$   
συνεχής στο  $[1, \frac{3}{2}]$

Πρέπει  $1 \leq \vartheta + \frac{1}{2} \leq 2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3}{2}$ , άρα

$\vartheta \in [1, \frac{3}{2}]$

$$g(1) = f(1) - f(\frac{3}{2})$$

$$g(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) - f(2) = f(\frac{3}{2}) - f(1)$$

$$g(1) \cdot g(\frac{3}{2}) = [f(1) - f(\frac{3}{2})][f(\frac{3}{2}) - f(1)] = -[f(1) - f(\frac{3}{2})]^2 \leq 0$$

... άρα υπάρχει τουλάχιστον 1  $\vartheta \in [1, \frac{3}{2}] : f(\vartheta) = f(\vartheta + \frac{1}{2})$