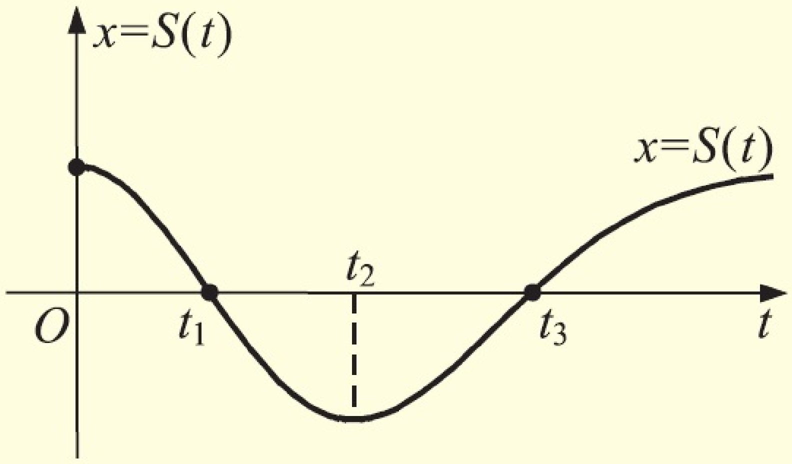
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:



i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

ii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

i) Επειδή η συνάρτηση S είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, t_2]$, το κινητό για $t \in [0, t_2]$ κινείται κατά την αρνητική φορά. Επειδή η S είναι γνησίως αύξουσα στο $[t_2, +\infty)$, το κινητό για $t \geq t_2$ κινείται κατά τη θετική φορά.

ii) Είναι γνωστό ότι η ταχύτητα του κινητού είναι $\upsilon(t) = S'(t)$ και ότι τις χρονικές στιγμές h' η C παρουσιάζει καμπή.
Από το σχήμα προκύπτει ότι:

— Στο διάστημα $[0, t_1]$ η S στρέφει τα κοίλα κάτω και άρα η $S'(t) = \upsilon(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα στο $[0, t_1]$ μειώνεται.

— Στο διάστημα $[t_1, t_3]$ η S στρέφει τα κοίλα πάνω και άρα η $S'(t) = \upsilon(t)$ είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα στο $[t_1, t_3]$ αυξάνεται.

— Ομοίως προκύπτει ότι η ταχύτητα στο $[t_3, +\infty)$ μειώνεται.

t	0	t_1	t_3	$+\infty$
$\upsilon(t)$	↘	↗	↘	

Δηλαδή, η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται στο διάστημα $[t_1, t_3]$ και στα διαστήματα $[0, t_1]$ και $[t_3, +\infty)$ μειώνεται.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \text{ και}$$

$$f'(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}, \text{ οπότε}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-\sqrt{3} \text{ ή } x=\sqrt{3}.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ Σ.Κ.		0 Σ.Κ.		$\frac{\sqrt{3}}{4}$ Σ.Κ.		

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα $-\sqrt{3}$, 0 και $\sqrt{3}$ και εκατέρωθεν αυτών αλλάζει πρόσημο, τα σημεία $A\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0,0)$ και $\Gamma\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f.

Επειδή τα σημεία A και Γ έχουν αντίθετες συντεταγμένες θα είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων που είναι το σημείο B.