7. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1,3]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(\xi + 2)$

Θεωρώ συνεχή συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(x) - f(x+2)$$

έχουμε: $g(1) = f(1) - f(3)$, $g(3) = f(3) - f(5) = f(3) - f(1)$

άρα: $g(1) \cdot g(3) = [f(1) - f(3)][f(3) - f(1)] = -[f(1) - f(3)]^2 \leq 0$

Αν $g(1) \cdot g(3) = 0$ τότε $g(1) = 0$ ή $g(3) = 0$

Αν $g(1) \cdot g(3) < 0$ τότε από θ. Bolzano υπάρχει τουλ. 1 $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Συνεπώς, υπάρχει 1 τουλ. $\xi \in [1,3]$: $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(\xi) - f(\xi + 2) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = f(\xi + 2)$$

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\,ln\,x - 3συνx + 4 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$

Έστω συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - 3συνx + 4$ με

$f(1) = 2\cdot\ln 1 - 3συν1 + 4 = 4 - 3συν1 \geq 0$

και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2\ln x - 3συνx + 4) = (-\infty) - 3 + 4 = -\infty$

άρα υπάρχει $κ>0$ (κοντά στο 0) τέτοιο, ώστε: $f(κ) < 0$

συνεπώς $f(κ)\cdot f(1) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει

ένα τουλάχιστον $x_0 \in (κ,1) \subset (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Ελέγχω τη μονοτονία της f στο $(0,1)$:

για $0 < x_1 < x_2 < 1$: $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2$

$συνx_1 > συνx_2 \Leftrightarrow -3συνx_1 < -3συνx_2$

άρα $2\ln x_1 - 3συνx_1 < 2\ln x_2 - 3συνx_2 \Leftrightarrow$

$2\ln x_1 - 3συνx_1 + 4 < 2\ln x_2 - 3συνx_2 + 4 \Leftrightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$

συνεπώς $f \uparrow (0,1)$. Αυτό σημαίνει ότι έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,1)$. Άρα το x_0 που βρήκαμε προηγουμένως είναι μοναδικό.