23531

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - lnx - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) < 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) Αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, θα έχουμε ότι για $x \in (0,1)$ οι αντίστοιχες τιμές $f'(x)$ θα ανήκουν στο διάστημα

$f'((0,1)) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x), \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x)\right) = (-\infty,\ e - 1)$ στο οποίο ανήκει ο αριθμός μηδέν και καθώς η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

Τότε για $x > x_0$ θα είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$ και ανάλογα

για $x < x_0$ θα είναι $f'(x) < f'(x_0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0]$. Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της f.

x	0 $\qquad$ x_0	$\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x_0)$

Ώστε η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$ αφού για $x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ ενώ για $x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Επίσης, από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι $x_0 < 1 \Rightarrow f(x_0) < f(1) = e - 3 < 0$.

γ) Επειδή είναι $f(x) - f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, έχουμε ότι $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$.

Ακόμα, $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{2023} = (f(x_0))^{2023} < 0$, καθώς η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Ώστε το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} (f(x))^{2023} = -\infty$.