16. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 9$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$

γ. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = -3$

16. α) Για κάθε $x \in [-3,3]$ ισχύει $f^2(x) = 9 - x^2$ (1)

Είναι: $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0$ και από την (1) : $9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$.

Επομένως οι ρίζες της $f(x) = 0$ στο $[-3,3]$ είναι μόνο οι αριθμοί -3 και 3.

β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$.

Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-3,3)$ με $x_1 < x_2$ ώστε τα $f(x_1), f(x_2)$ να είναι ετερόσημοι αριθμοί. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq [-3,3]$, $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Bolzano στο $[x_1, x_2] \subseteq [-3,3]$.

Επομένως υπάρχει $\theta \in (x_1, x_2)$ ώστε $f(\theta) = 0$. Στην (1) για $x = \theta$ είναι:

$f^2(\theta) = 9 - \theta^2 \Leftrightarrow 9 - \theta^2 = 0 \Leftrightarrow \theta^2 = 9 \Leftrightarrow \theta = 3$ ή $\theta = -3$ άτοπο διότι

$\theta \in (x_1, x_2) \subseteq (-3,3)$. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$.

γ) Η f είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$, $f(0) = -3$

άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-3,3)$.

Από την (1) είναι $f^2(x) = 9 - x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow$

$-f(x) = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ για κάθε $x \in (0,3)$.

Όμως $f(-3) = f(3) = 0$ οπότε $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

18. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$f^2(x) - 2f(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = -1$

$$f^2(x) - 2f(x) = x^2 - 2x \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - x^2 - 2f(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)(f(x) + x) - 2(f(x) - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)(f(x) + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - x = 0 \\ \text{ή} \\ f(x) + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ \text{ή} \\ f(x) = 2 - x \end{cases}$$

Επειδή $f(3) = -1$ ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = 2 - x$$

21. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ln\,x + \frac{x-1}{x}, x > 0$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x = 1 - x$

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\theta \in (\alpha, \beta)$, $a > 1$ τέτοιο ώστε $f^3(\theta) = f(\alpha) f(\beta) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

21.α) Είναι $f(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, άρα

$$f(A) \overset{f\nearrow}{=} \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty).$$

γ) $$x \ln x = 1 - x \Leftrightarrow \ln x = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \ln x + \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

δ) $$1 < \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 0 = f(1) < f(\alpha) < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\beta).$$

Έστω $g(x) = f^3(x) - f(\alpha) f(\beta) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Έχουμε:

• $g(\alpha)=f^3(\alpha)-f(\alpha)f(\beta)f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\underset{>0}{f(\alpha)}\left(f^2(\alpha)-f(\beta)f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)<0$,

(είναι $f(\alpha)<f(\beta)$, $f(\alpha)<f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη

έχουμε: $f^2(\alpha)-f(\beta)f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$).

• $g(\beta)=f^3(\beta)-f(\alpha)f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)f(\beta)=\underset{>0}{f(\beta)}\left(f^2(\beta)-f(\alpha)f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)>0$,

οπότε $g(\alpha)g(\beta)<0$.

Η g συνεχής, στο $[\alpha,\beta]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano

άρα υπάρχει $\theta\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\theta)=0 \Leftrightarrow f^2(\theta)=f(\alpha)f(\beta)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα το ξ είναι μοναδικό.