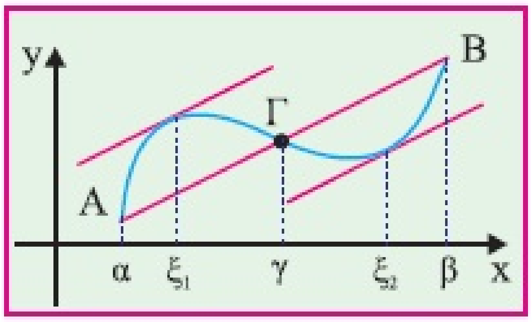
Κατηγορία – Μέθοδος 6

Στις ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη $\xi \epsilon (\alpha,\beta): f''(\xi)=0$.
Αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. Τα ξ_1,ξ_2 προκύπτουν εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλα διαστήματα $[\alpha,\kappa],[\kappa,\beta]$.
Στη συνέχεια αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f' θα υπάρχει $\xi\epsilon(\alpha,\beta): f''(\xi)=0$.

Παράδειγμα

Έστω οι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f. Αν γνωρίζεται ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την χορδή ΑΒ στο $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$ με $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ και $\alpha<\gamma<\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta): f''(\xi)=0$.



Λύση

Στο (α,γ) από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ_1:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\lambda_{A\Gamma}$ (συντελεστής διεύθυνσης της ΑΓ).

Στο (γ,β) από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ_2:

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\lambda_{\Gamma B}$. Όμως $\lambda_{A\Gamma}=\lambda_{\Gamma B}$ οπότε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) και συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$.
Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$: $f''(\xi)=0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 7

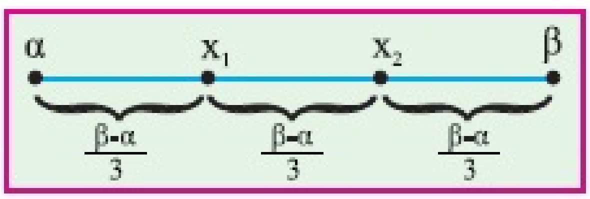
Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η απόδειξη ύπαρξης $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\nu\in(\alpha,\beta)$ που πληρούν μια συγκεκριμένη σχέση.
Εδώ πρόκειται για εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. σε διαστήματα που προκύπτουν από κατάλληλη διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ η οποία διαμέριση υπαγορεύεται από τα δεδομένα του προβλήματος.
Στην ειδική περίπτωση που ζητείται ύπαρξη $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ και το επιτρέπει το πρόβλημα, προχωρούμε στην εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$,
(το πλάτος $c=\frac{\beta-\alpha}{2}$)
Διαφορετικά από την σχέση των ξ_1,ξ_2 και από τα δεδομένα του προβλήματος θα προχωρήσουμε στην επιλογή του κ για την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha,\kappa],[\kappa,\beta]$. (Το κ δεν είναι πάντα το μέσο του (α,β))

Παράδειγμα 1

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=1$ και $f(\beta)=2004$. Δείξτε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=\dfrac{6009}{\beta-\alpha}$.

Λύση

Διαμερίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα πλάτους $\dfrac{\beta-\alpha}{3}$.



Προφανώς ισχύει: $x_1=\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{3}=\dfrac{2\alpha+\beta}{3}$,

$$x_2=\alpha+2\frac{\beta-\alpha}{3}=\frac{\alpha+2\beta}{3}$$

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, \beta]$. Επομένως υπάρχουν: $\xi_1 \in (\alpha, x_1)$ με

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha}=\frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{2\alpha+\beta}{3}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (1) \text{ και}$$

$\xi_2 \in (x_1, x_2)$ με

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\alpha+2\beta}{3}-\frac{2\alpha+\beta}{3}}=\frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (2) \text{ και}$$

$$\xi_3 \in (x_2, \beta) \text{ με } f'(\xi_3)=\frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta-\frac{\alpha+2\beta}{3}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3) και έχουμε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=\frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}+\frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}+\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}=$$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}=\frac{3[f(\beta)-f(\alpha)]}{\beta-\alpha}\overset{\text{υπόθεση}}{=}\frac{3[2004-1]}{\beta-\alpha}=\frac{6009}{\beta-\alpha}.$$

Παράδειγμα 2

Για τη συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [2002, 2006] ισχύει $2f(2004)=f(2002)+f(2006)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (2002, 2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα [2002, 2004] και [2004, 2006].

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν : $\xi_1 \in (2002, \ 2004)$ και $\xi_2 \in (2004, \ 2006)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2004)-f(2002)}{2004-2002} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(2006)-f(2004)}{2006-2004}$$

$$\text{ή } f'(\xi_1)=\frac{f(2004)-f(2002)}{2} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(2006)-f(2004)}{2}$$

Ισχύει : $2f(2004)=f(2002)+f(2006) \Leftrightarrow f(2004)-f(2002)=f(2006)-f(2004)$.

Επομένως είναι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

Η συνάρτηση f΄ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και ισχύει $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$, επομένως από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ δηλαδή $\xi \in (2002, 2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.