Συνέχεια συνάρτησης

Συνέχεια σε σημείο
Έστω μία συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Συνέχεια στο (α, β)
Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β)

Συνέχεια στο $[\alpha, \beta]$
Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Συνεχής συνάρτηση
Συνεχής λέγεται μία συνάρτηση που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.
Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς σε κάθε σημείου του πεδίου ορισμού τους:

- **α.** Πολυωνυμικές
- **β.** Ρητές
- **γ.** Τριγωνομετρικές
- **δ.** Εκθετικές
- **ε.** Λογαριθμικές

Πράξεις και σύνθεση με συνεχείς συναρτήσεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f + g$, $c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$ (με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0).
Επιπλέον, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Θεώρημα Bolzano

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$
- Ισχύει ότι $f(\alpha)f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$
Δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).