

3. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, της οποίας η ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° .

Έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon \varphi 30^\circ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1}{3}$

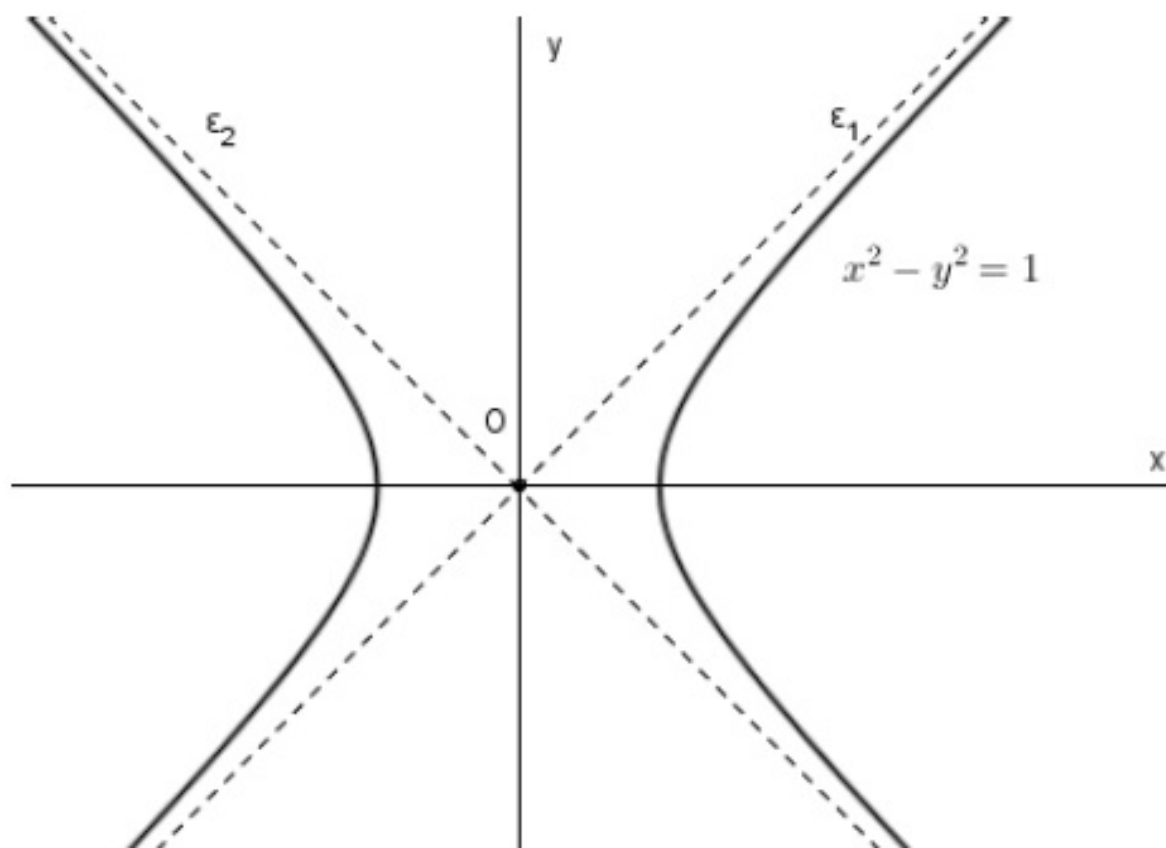
$$\Leftrightarrow \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\alpha^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

22051

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:



α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

(Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Γενικά, οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Εδώ είναι $\alpha = \beta = 1$.

Οπότε, οι ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της δοθείσας υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = -x$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι οι ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της δοθείσας υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = -x$ και συνεπώς οι αντίστοιχες κλίσεις είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Άρα, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Επομένως, $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

21656

ΘΕΜΑ 4

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0), A'(-4,0)$.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C .

(Μονάδες 3)

ii. την εξίσωση της υπερβολής C .

(Μονάδες 3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C , τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C .

(Μονάδες 9)

γ) Αν M τυχαίο σημείο της C , να βρείτε την τιμή της παράστασης $(ME) - (ME')$.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $M(\sqrt{80}, 6)$ σημείο της C , να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα $x\chi'$, οπότε θα έχει

ασύμπτωτες της μορφής $y = \frac{\beta}{\alpha}x$, $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ και εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Αφού οι εστίες είναι $E(5,0), E'(-5,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\gamma = 5$ και αφού οι κορυφές της είναι τα σημεία $A(4,0), A'(-4,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 4$. Επομένως

από τη σχέση $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ έχουμε ότι $5^2 = 4^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 9 \stackrel{\beta > 0}{\Leftrightarrow} \beta = 3$. Τελικά

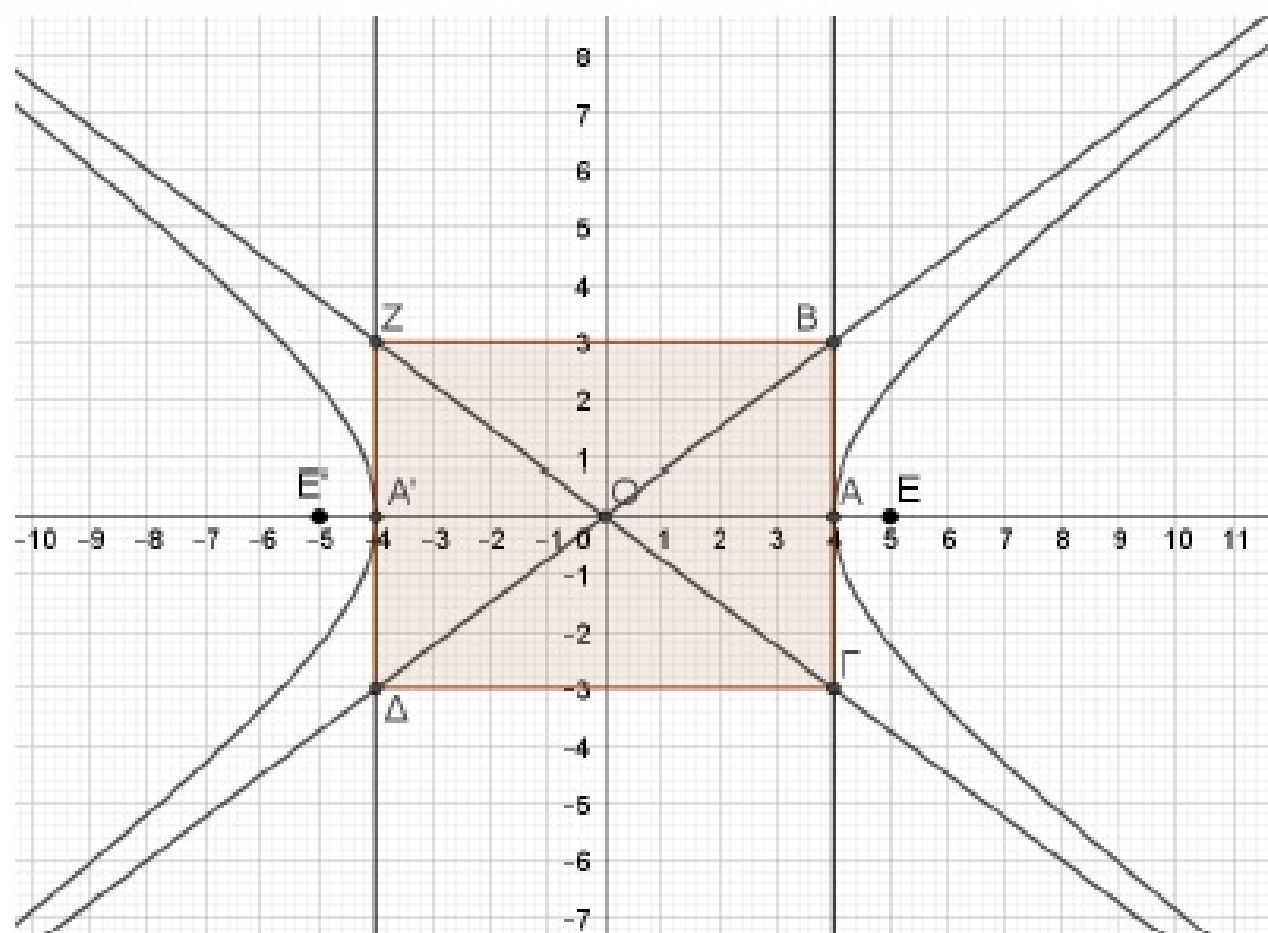
i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C είναι $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$

ii. η εξίσωση της υπερβολής C είναι $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

β) Οι κορυφές του ορθογωνίου βάσης είναι τα σημεία τομής των ασυμπτώτων της C με τις εφαπτόμενες της C στις κορυφές της, δηλαδή τα σημεία τομής των ευθειών $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$ με τις ευθείες $x = 4$, $x = -4$.

Τα σημεία αυτά είναι τα $B(4,3), \Gamma(4,-3), \Delta(-4,-3), Z(-4,3)$, ενώ οι ασύμπτωτες της C είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου βάσης.

Η υπερβολή C , οι ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C , φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Για το επόμενο μάθημα: την υπόλοιπη άσκηση 21656