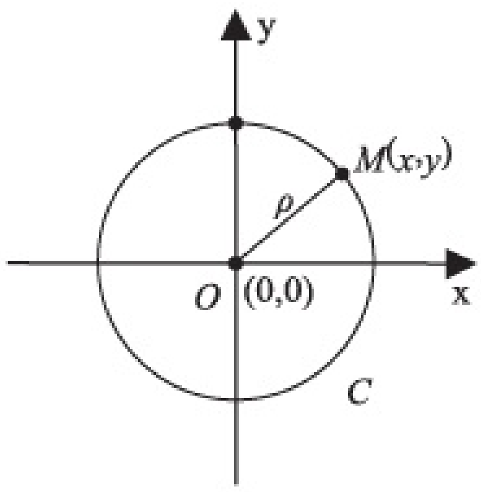
3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση Κύκλου

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο



$M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(OM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(OM)=\sqrt{x^2+y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho \quad \text{ή, ισοδύναμα,}$$

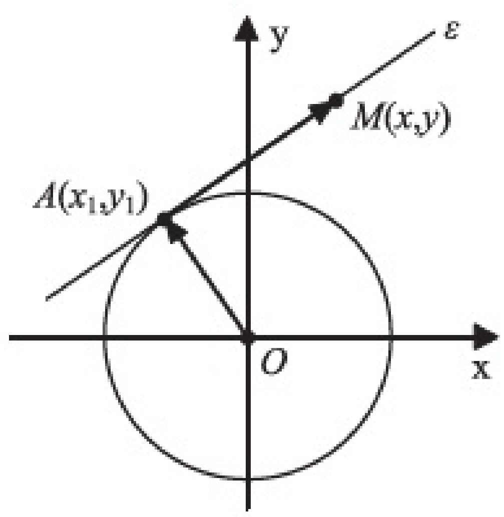
$$x^2+y^2=\rho^2. \qquad (2)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$\boxed{x^2+y^2=\rho^2} \qquad (3)$$

Για παράδειγμα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται **μοναδιαίος κύκλος.**

Εφαπτομένη Κύκλου



Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $OA \perp AM$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}=0. \qquad (1)$$

Όμως $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1)$. Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$

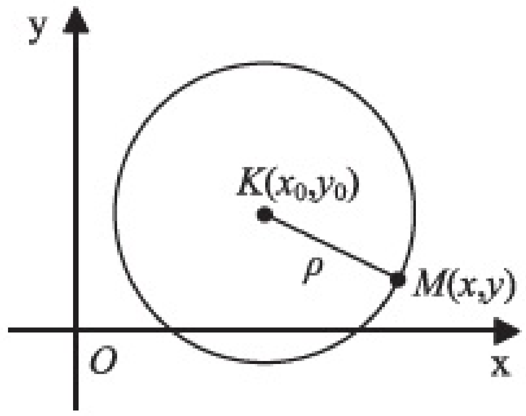
$$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$$

$$xx_1+yy_1=\rho^2, \qquad \text{αφού} \qquad x_1^2+y_1^2=\rho^2.$$

Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$$

Η Εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$



- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του K απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$(KM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(KM)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho$ ή, ισοδύναμα, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

Άρα, ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2} \qquad (2)$$

Έτσι, για παράδειγμα, ο κύκλος με κέντρο $K(1,-3)$ και ακτίνα $\rho=2$ έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y+3)^2=\rho^2$.

- Αν τώρα εκτελέσουμε τις πράξεις, η εξίσωση (2) γράφεται

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0,$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0, \qquad (3)$$

όπου $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$.

Αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (3) γράφεται διαδοχικά:

$$(x^2+Ax)+(y^2+By)=-\Gamma$$

$$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=-\Gamma+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$

Επομένως:

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (3) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση (3) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

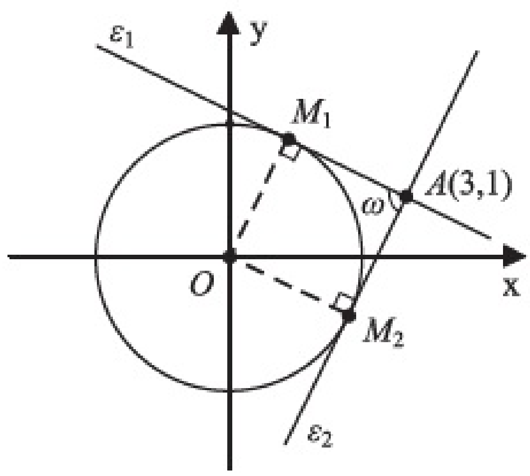
$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0, \quad \text{με} \quad A^2+B^2-4\Gamma>0 \qquad \text{(I)}$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (I) παριστάνει κύκλο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ που διέρχονται από το σημείο $A(3,1)$, και να αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

ΛΥΣΗ



Έστω ε_1 μια εφαπτομένη του κύκλου C που διέρχεται από το σημείο A. Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η ε_1 θα έχει εξίσωση

$$xx_1+yy_1=5 \qquad (1)$$

και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$, θα ισχύει

$$3x_1+y_1=5. \qquad (2)$$

Όμως, το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ ανήκει στον κύκλο C. Άρα, θα ισχύει

$$x_1^2+y_1^2=5. \qquad (3)$$

Επομένως, οι συντεταγμένες (x_1,y_1) του M_1 είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων (2) και (3). Λύνουμε το σύστημα αυτό και βρίσκουμε δύο λύσεις:

$$(x_1,y_1)=(1,2) \quad \text{ή} \quad (x_1,y_1)=(2,-1) \qquad (4)$$

Άρα, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του C που διέρχονται από το σημείο $A(3,1)$, οι οποίες, λόγω των (1) και (4), έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: x+2y=5, \quad \varepsilon_2: 2x-y=5.$$

Επειδή οι συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_2 είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και $\lambda_2=2$, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.