15178

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x+(\mu+2)y=0,\ \mu\in\mathbb{R}$ (1).

α)

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 02)

β)

i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ, προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για όλες τις πραγματικές τιμές του μ, εκτός από αυτές για τις οποίες είναι: $\begin{cases}\mu+1=0\\ \mu+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=-1\\ \mu=-2\end{cases}$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο, ως εκ τούτου η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

ii. Το σημείο $O(0,0)$ επαληθεύει την (1), επομένως όλες οι ευθείες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β)

i. Αν $\mu=-1$, η (1) γράφεται $y=0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης 0 και εκφράζει τον άξονα $x'x$.

ii. Αν $\mu=-2$, η (1) γράφεται $x=0$, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης και εκφράζει τον άξονα $y'y$.

γ) Μία ευθεία (ε) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ όταν $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 45° = 1$.

Αν $\mu + 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = -2$, η ευθεία έχει εξίσωση $x = 0$, παριστάνει τον άξονα $y'y$ και σχηματίζει γωνία 90° με τον άξονα $x'x$.

Επομένως, πρέπει $\mu \neq -2$ οπότε ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης με $\lambda_\varepsilon = -\frac{\mu+1}{\mu+2}$.

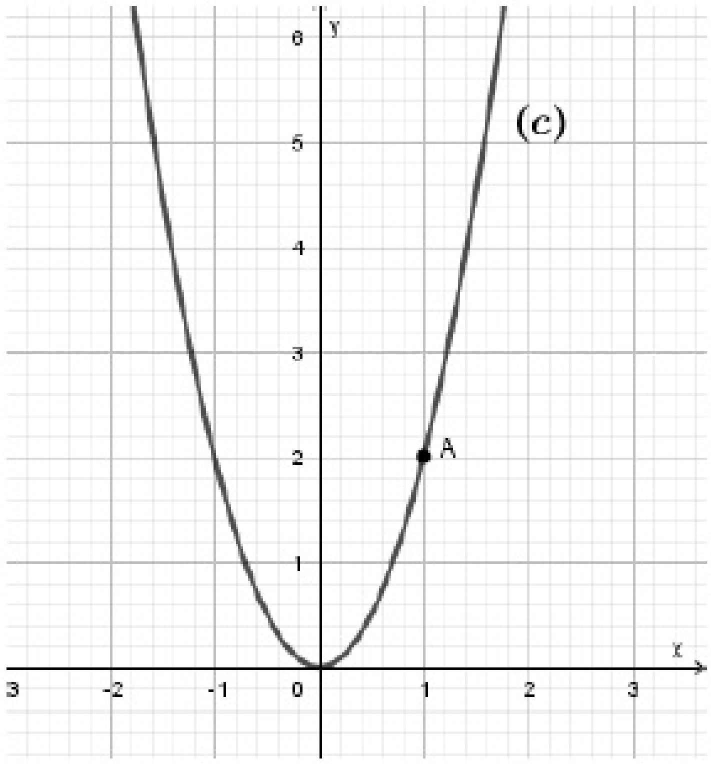
Τότε, είναι: $1 = -\frac{\mu+1}{\mu+2} \Leftrightarrow \mu + 2 = -\mu - 1 \Leftrightarrow \mu = -\frac{3}{2}$.

Από (1) $\overset{\mu=-\frac{3}{2}}{\Longrightarrow}$ $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow y = x$.

20866

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής.

(Μονάδες 04)

γ)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.

(Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Ως γνωστόν, η παραβολή που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $y'y$ έχει εξίσωση την $x^2 = 2py$. Επιπλέον, έχει εστία το σημείο $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $y = -\frac{p}{2}$.

Επειδή η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ συμπεραίνουμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Επομένως είναι: $1^2 = 2p \cdot 2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι η $(c): x^2 = \frac{1}{2}y$.

Επίσης, η παραβολή έχει εστία το σημείο $E\left(0, \frac{1}{8}\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $y = -\frac{1}{8}$.

β) Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Είναι γνωστό ότι τα συμμετρικά σημεία ως προς τον άξονα $y'y$ έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη. Αν λοιπόν $A'(x, y)$ είναι το συμμετρικό σημείο του A, τότε είναι $A'(-1,2)$.

γ)

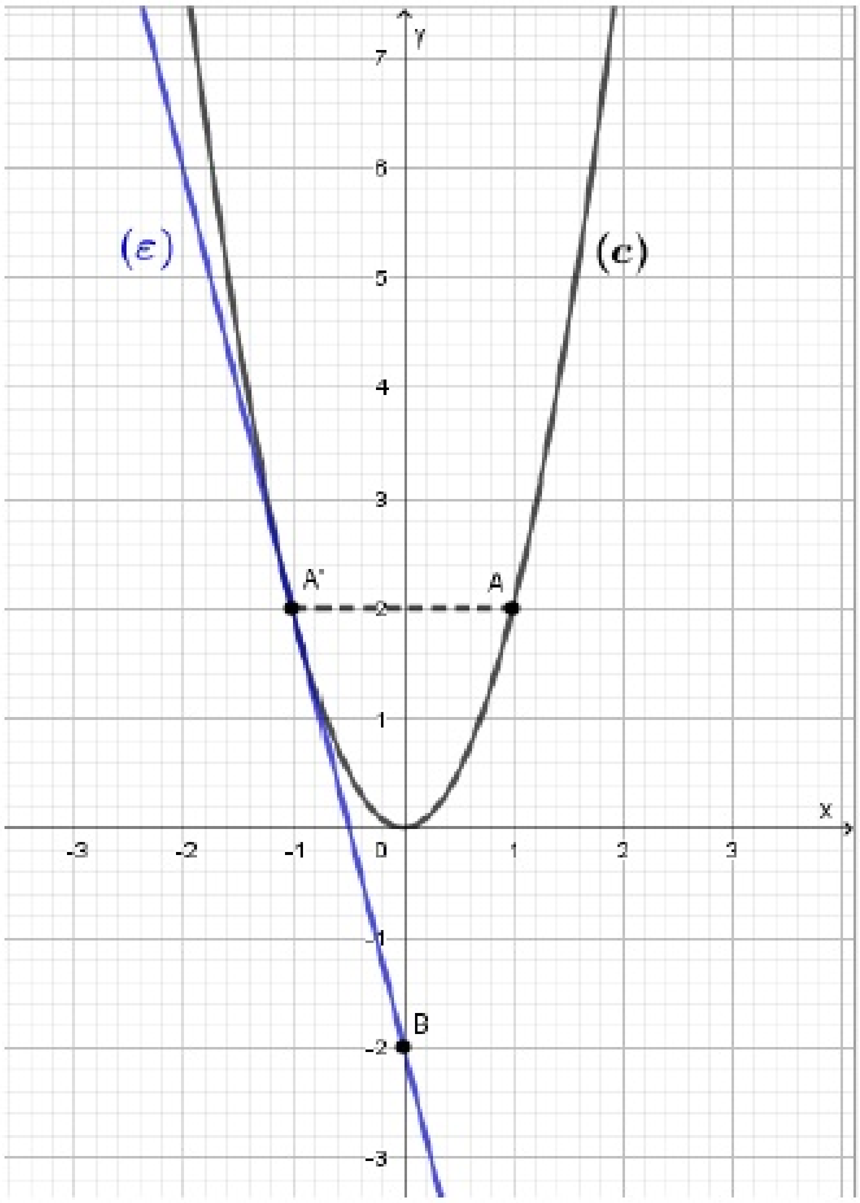
i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $x \cdot x_1 = p(y + y_1)$.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής $(c): x^2 = \frac{1}{2}y$ στο σημείο της $A'(-1,2)$, είναι:

$$x \cdot (-1) = \frac{1}{4}(y + 2) \Leftrightarrow -4x = y + 2 \Leftrightarrow y = -4x - 2$$

ii. Για $x = 0$, η $(\varepsilon): y = -4x - 2$ γίνεται $y = -4 \cdot 0 - 2 = -2$.

Επομένως, το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(0, -2)$. Για τον σχεδιασμό της ευθείας (ε) αρκεί να φέρουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A'(-1,2)$ και $B(0, -2)$.



y
x
(ε)
(c)
A'
A
B
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3