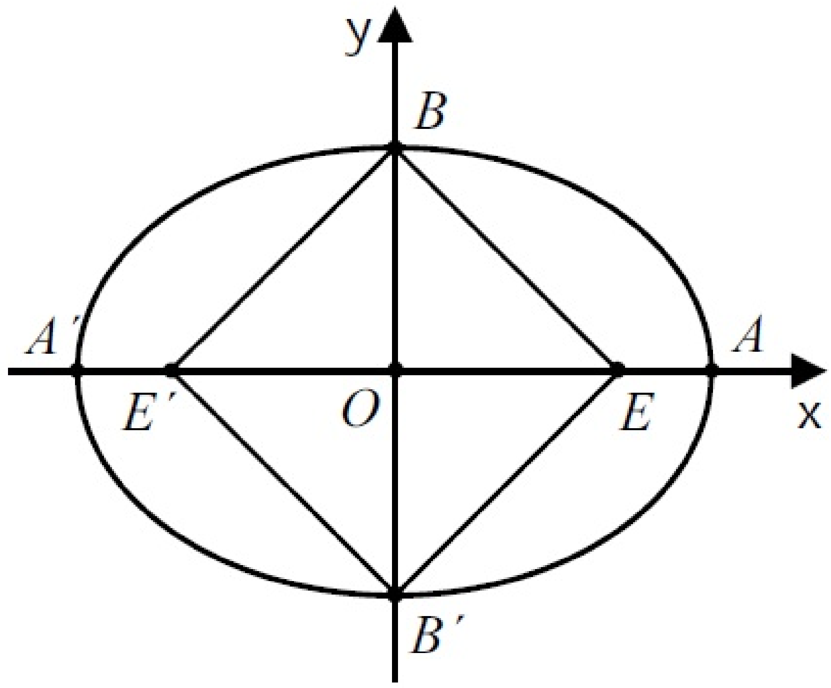
4. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2+2y^2=4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.

Η εξίσωση $x^2+2y^2=4$ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\sqrt{2}^2}=1$$



απ' όπου προκύπτει ότι $\alpha=2,\ \beta=\sqrt{2}$ και $\gamma=\sqrt{2}$. Επομένως, οι κορυφές B και B' έχουν συντεταγμένες $(0,\sqrt{2})$ και $(0,-\sqrt{2})$ αντιστοίχως, ενώ οι εστίες E και E' έχουν συντεταγμένες $(\sqrt{2},0)$ και $(-\sqrt{2},0)$ αντιστοίχως. Άρα, το τετράπλευρο $EBE'B'$ είναι τετράγωνο, αφού οι διαγώνιές του είναι ίσες, κάθετες και διχοτομούνται.

6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2+y^2=4$, οι οποίες:

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=-3x+1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(0,4)$.

Η εφαπτομένη ε της έλλειψης $3x^2+y^2=4$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $3xx_1+yy_1=4$ και άρα συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\frac{3x_1}{y_1}$. Επομένως:

(i) Η εφαπτομένη ε είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-3x+1$, αν και μόνο αν $\frac{-3x_1}{y_1}=-3$ ή, ισοδύναμα,

$$y_1=x_1.$$

Όμως το $M(x_1,y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης. Άρα, θα έχουμε: $3x_1^2+y_1^2=4$ και, επειδή $y_1=x_1$, θα ισχύει

$$3x_1^2+x_1^2=4 \Leftrightarrow 4x_1^2=4 \Leftrightarrow x_1^2=1 \Leftrightarrow x_1=\pm 1.$$

Επομένως,

$$(x_1, y_1) = (1,1) \text{ ή } (x_1, y_1) = (-1,-1).$$

Έτσι, υπάρχουν δύο ευθείες εφαπτόμενες της έλλειψης, που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = -3x + 1$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι οι $3x + y = 4$ και $-3x - y = 4$.

(ii) Η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$, αν και μόνο αν $\frac{-3x_1}{y_1} \cdot \frac{1}{2} = -1$

ή, ισοδύναμα, $y_1 = \frac{3x_1}{2}$. Άρα, το σημείο M θα έχει συντεταγμένες $\left(x_1, \frac{3x_1}{2}\right)$ και, αφού ανήκει στην έλλειψη, θα είναι:

$$3x_1^2 + \left(\frac{3x_1}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 3x_1^2 + \frac{9x_1^2}{4} = 4 \Leftrightarrow 21x_1^2 = 16 \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Επομένως

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{6}{\sqrt{21}}\right) \text{ ή } (x_1, y_1) = \left(-\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{6}{\sqrt{21}}\right).$$

Άρα, οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι ευθείες:

$$\frac{3 \cdot 4}{\sqrt{21}}x + \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4 \text{ και } -\frac{3 \cdot 4}{\sqrt{21}}x - \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4,$$

οι οποίες γράφονται

$$6x + 3y - 2\sqrt{21} = 0 \text{ και } 6x + 3y + 2\sqrt{21} = 0.$$

(iii) Η εφαπτομένη ε διέρχεται από το $M(0,4)$, αν και μόνο αν η εξίσωση της ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του M. Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει $3x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 4 = 4$ ή, ισοδύναμα, $y_1 = 1$. Επειδή το $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη, θα έχουμε:

$$3x_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow 3x_1^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1.$$

Επομένως

$$(x_1, y_1) = (1,1) \text{ ή } (x_1, y_1) = (-1,1)$$

Άρα, θα έχουμε δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το $M(0,4)$, τις ευθείες $3x + y = 4$ και $-3x + y = 4$.