

Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου θα αποδείξουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

- $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$, όπου $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$, εφόσον $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$

Πράγματι, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$, τότε έχουμε:

- $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \cdot (x_2, y_2) = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

και

$$\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (x_1, y_1) \cdot (\lambda x_2, \lambda y_2) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}).$$

Άρα,

$$(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

- $\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3) + (y_1y_2 + y_1y_3) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) \\ &= \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}. \end{aligned}$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1y_2 = -x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \theta$ και επομένως,

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}.$$