

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B .

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

(Μονάδες 8)

γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Κάνουμε αντικατάσταση τις συντεταγμένες των σημείων A και B στο τύπο της απόστασης

$$(AB) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10}.$$

β) Για να βρούμε τη τιμή του α θα λύσουμε την εξίσωση που προέρχεται από τη ισότητα

$$(AB) = d(A, \varepsilon) \Leftrightarrow (AB) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ δηλαδή } \sqrt{10} = \frac{|6 + \alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10, \text{ τότε}$$

$$\alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -16.$$

γ) Για $\alpha = 4$ η ευθεία ε γίνεται $\varepsilon: 3x + y + 4 = 0$.

Η ευθεία τέμνει τον $y'y$ για $x = 0$. Άρα, το σημείο τομής της ε με τον άξονα $y'y$ είναι $(0, -4)$.

Άρα $\Gamma(0, -4)$.

Επίσης, βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -1) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (-1, -7).$$

Από το τύπο του εμβαδού τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$ υπολογίζουμε ότι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$