

ΘΕΜΑ 22072 (2ο Θέμα)

Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$ και (2): $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

(Μονάδες 10)

α) (1): $\lambda \neq 0$ ή $\lambda - 1 \neq 0$ αυτό ισχύει για κάθε λ

(2): $\lambda \neq -\frac{1}{3}$ ή $\lambda \neq 0$ αυτό ισχύει για κάθε λ

Άρα οι (1) και (2) παριστάνουν ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Για να είναι κάθετες οι ευθείες πρέπει (για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$):

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{3\lambda+1}{2\lambda} = -1 \Leftrightarrow 3\lambda + 1 = 2(\lambda - 1) \Leftrightarrow 3\lambda + 1 = 2\lambda - 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\lambda - 2\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

- Για $\lambda = 0$: (1): $y = -4$

(2): $x = 7$

Άρα και για $\lambda = 0$ είναι κάθετες

- Για $\lambda = 1$: (1): $x = 4$

(2): $4x - 2y - 7 = 0$

Για $\lambda = 1$ δεν είναι κάθετες.

ΘΕΜΑ 21652 (4ο Θέμα)

Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται.

(Μονάδες 6)

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

i. να βρείτε συνάρτησε του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ε_λ και η_λ .

(Μονάδες 7)

ii. αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το M κινείται στην ευθεία $\zeta : x - y = 1$.

(Μονάδες 6)

α) Η εξίσωση $\lambda x + y = 2\lambda$ είναι της μορφής $Ax + By = \Gamma$ με $B = 1 \neq 0$ οπότε παριστάνει ευθεία ε_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Ομοίως η εξίσωση $x + \lambda y = \lambda + 1$ είναι της μορφής $Ax + By = \Gamma$ με $A = 1 \neq 0$ οπότε παριστάνει ευθεία η_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται αν και μόνο αν το σύστημά τους έχει μοναδική λύση. Το

σύστημά τους $\begin{cases} \lambda x + y = 2\lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$ είναι γραμμικό με ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Για να έχει μοναδική λύση πρέπει και αρκεί $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 1$.

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

i. Το σημείο τομής M των ε_λ και η_λ προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2\lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases} \quad \text{και είναι το σημείο με συντεταγμένες } \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right), \quad \text{όπου}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 2(\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \quad \text{και}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1).$$

$$\text{Είναι } \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} \quad \text{και} \quad \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

$$\text{Συνεπώς } M\left(\frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda}{\lambda + 1}\right) \text{ με } \lambda \neq \pm 1.$$

ii. Το M κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ζ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\text{Πράγματι } \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} - \frac{\lambda}{\lambda + 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda + 1}{\lambda + 1} = 1 \text{ που ισχύει.}$$