

Α' ΟΜΑΔΑΣ(Σελ. 47)

1. Αν $\vec{\alpha} = (-1,3)$ και $\vec{\beta} = (2,5)$, τότε

(i) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $(2\vec{\alpha}) \cdot (-3\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

(ii) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$, ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσο με μηδέν. Ποια η σχέση όλων των διανυσμάτων $\vec{u}$ στην περίπτωση αυτή;

$$\text{i) } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (-1,3) \cdot (2,5) = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = -2 + 15 = 13$$

$$\begin{aligned}(2\vec{\alpha}) \cdot (-3\vec{\beta}) &= -6(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = -6 \cdot [(-1,3) \cdot (2,5)] = -6(-1 \cdot 2 + 3 \cdot 5) = -6(-2 + 15) \\ &= -6 \cdot 13 = -78\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &= 3\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = \\ &= 3 \cdot (-1,3) \cdot (-1,3) - 2 \cdot 13 - (2,5) \cdot (2,5) = \\ &= 30 - 26 - 29 = -25\end{aligned}$$

$$\text{ii) } \vec{u} = (\kappa, \lambda), \vec{\beta} = (2,5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (\kappa, \lambda) \cdot (2,5) = 0 \Leftrightarrow 2\kappa + 5\lambda = 0$$

$$\text{ή } 2\kappa = -5\lambda$$

$$\text{ή } \kappa = -\frac{5}{2}\lambda$$

2. Αν $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2)$ και $\vec{w} = (6, 0)$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
 $\vec{u} \cdot (7\vec{v} + \vec{w})$, $|\vec{u}|(\vec{v} \cdot \vec{w})$, $|(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}|$ και $(|\vec{u}| \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (7\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot [7(4, 2) + (6, 0)] = \vec{u} \cdot [(28, 14) + (6, 0)] = (1, 2) \cdot (34, 14) = \\ &= 34 + 28 = 62\end{aligned}$$

$$|\vec{u}|(\vec{v} \cdot \vec{w}) = |(1, 2)|[(4, 2) \cdot (6, 0)] = \sqrt{1^2 + 2^2}(4 \cdot 6 + 2 \cdot 0) = \sqrt{5} \cdot (24 + 0) = 24\sqrt{5}$$

$$|(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}| = |[(1, 2) \cdot (4, 2)] \cdot (6, 0)| = |(4 + 4) \cdot (6, 0)| = |(48, 0)| = 48$$

$$\begin{aligned}(|\vec{u}| \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \left(\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot (4, 2)\right) \cdot (6, 0) = \left(\sqrt{5}(4, 2)\right) \cdot (6, 0) = (4\sqrt{5}, 2\sqrt{5})(6, 0) = \\ &= 24\sqrt{5} + 0 = 24\sqrt{5}\end{aligned}$$