

4. Ποιο σημείο της ευθείας $2x - 3y = 30$ ισαπέχει από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(7,9)$;

Έστω $M(x_0, y_0)$ σημείο της ευθείας $\varepsilon: 2x - 3y = 30$

$$\text{Άρα: } 2x_0 - 3y_0 = 30 \Leftrightarrow 3y_0 = 2x_0 - 30 \Leftrightarrow y_0 = \frac{2x_0 - 30}{3}$$

Θέλω το σημείο M να ισαπέχει από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(7,9)$

$$d(M, A) = d(M, B) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 \Leftrightarrow$$

$$x_M^2 - 2x_Mx_A + x_A^2 + y_M^2 - 2y_My_A + y_A^2 = x_M^2 - 2x_Mx_B + x_B^2 + y_M^2 - 2y_My_B + y_B^2 \Leftrightarrow$$

$$-2x_Mx_A + x_A^2 - 2y_My_A + y_A^2 = -2x_Mx_B + x_B^2 - 2y_My_B + y_B^2 \Leftrightarrow$$

$$-2x_0 \cdot 1 + 1^2 - 2y_0 \cdot 3 + 3^2 = -2x_0 \cdot 7 + 7^2 - 2y_0 \cdot 9 + 9^2 \Leftrightarrow$$

$$-2x_0 + 1 - 6y_0 + 9 = -14x_0 + 49 - 18y_0 + 81 \Leftrightarrow$$

$$-2x_0 + 14x_0 - 6y_0 + 18y_0 = 49 + 81 - 1 - 9 \Leftrightarrow$$

$$12x_0 + 12y_0 = 120 \Leftrightarrow 12(x_0 + y_0) = 120 \Leftrightarrow x_0 + y_0 = 10 \Leftrightarrow$$

$$x_0 + \frac{2x_0 - 30}{3} = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot x_0 + 3 \cdot \frac{2x_0 - 30}{3} = 3 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$3x_0 + 2x_0 - 30 = 30 \Leftrightarrow 5x_0 = 60 \Leftrightarrow x_0 = 12$$

$$y_0 = -2$$

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5 μονάδες.

5. Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής $y = -3x + \beta$, δηλαδή της μορφής $3x + y - \beta = 0$. Επομένως, θα έχουμε:

$$\frac{|3 \cdot 0 + 0 - \beta|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 5 \Leftrightarrow |\beta| = 5\sqrt{10} \Leftrightarrow \beta = \pm 5\sqrt{10}.$$

Αρα υπάρχουν δύο ευθείες που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος. Αυτές έχουν εξισώσεις:

$$3x + y - 5\sqrt{10} = 0 \text{ και } 3x + y + 5\sqrt{10} = 0$$

6. Η ευθεία $\varepsilon : 3x - 2y + 1 = 0$ είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 , που απέχουν 8 μονάδες. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ επειδή είναι παράλληλες προς την ε , θα έχουν εξισώσεις της μορφής $3x - 2y + \beta = 0$.

Αφού, όμως, η ε είναι μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2 και αυτές απέχουν μεταξύ τους 8 μονάδες, η απόσταση οποιουδήποτε σημείου A της ε από κάθε μία θα είναι 4 μονάδες.

Ένα σημείο της ε είναι το $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Επομένως, θα έχουμε

$$\frac{\left|3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + \beta\right|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|\beta - 1|}{\sqrt{13}} = 4 \Leftrightarrow |\beta - 1| = 4\sqrt{13} \Leftrightarrow \beta = 1 \pm 4\sqrt{13}.$$

Αρα, οι ζητούμενες ευθείες θα είναι οι:

$$\varepsilon_1 : 3x - 2y + 1 + 4\sqrt{13} = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : 3x - 2y + 1 - 4\sqrt{13} = 0.$$

Υπολογισμός Εμβαδού

Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου.

Αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$$