14954

Θεωρούμε τις εξισώσεις (ε_1): $\mu x - y - \mu = 0$ και

(ε_2): $(\mu+1)x + (\mu - 1)\, y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45^o για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

ΛΥΣΗ

α) Κάθε μία από τις εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) είναι στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, εξίσωση που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία όταν $|A| + |B| > 0$, δηλαδή όταν οι αριθμοί Α και Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Παρατηρούμε ότι στην (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$, ενώ στην (ε_2) είναι $A = \mu + 1, B = \mu - 1$ και $A = 0$ για $\mu = -1$, $B = 0$ για $\mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές Α και Β.

β) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$. Έτσι, θα είναι $\overrightarrow{\delta_1} = (1, \mu)$ παράλληλο στην (ε_1) και

$\overrightarrow{\delta_2} = (1 - \mu, 1 + \mu)$ παράλληλο στην (ε_2).

Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2) θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\overrightarrow{\delta_1}$ και $\overrightarrow{\delta_2}$. Αλλά $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\overrightarrow{\delta_1}\cdot\overrightarrow{\delta_2}}{|\overrightarrow{\delta_1}|\cdot|\overrightarrow{\delta_2}|}$.

Όμως $\overrightarrow{\delta_1} \cdot \overrightarrow{\delta_2} = 1 \cdot (1 - \mu) + \mu \cdot (1 + \mu) = 1 - \mu + \mu + \mu^2 = 1 + \mu^2$.

Επίσης $|\overrightarrow{\delta_2}| = \sqrt{(1 - \mu)^2 + (1 + \mu)^2} = \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2} = \sqrt{2 + 2\mu^2} = \sqrt{2(1 + \mu^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \mu^2} = \sqrt{2} \cdot |\overrightarrow{\delta_1}|$.

Έτσι, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1+\mu^2}{|\overrightarrow{\delta_1}|\cdot\sqrt{2}\cdot|\overrightarrow{\delta_1}|} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}|\overrightarrow{\delta_1}|^2} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}(1+\mu^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ώστε $\hat{\theta} = 45^o$.

γ) Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Ένας τρόπος είναι με την μέθοδο της αντικατάστασης. Από την (ε_1) παίρνουμε $y = \mu x - \mu$ οπότε αντικαθιστώντας στην (ε_2) παίρνουμε

$(\mu + 1)x + (\mu - 1)(\mu x - \mu) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(\mu + 1)x + \mu(\mu - 1)x - \mu(\mu - 1) - \mu + 1 = 0$, άρα

$(\mu + 1 + \mu^2 - \mu)x - \mu^2 + \mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2+1}$.

Τότε $y = \mu \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2+1} - \mu = \frac{\mu^3 - \mu - \mu^3 - \mu}{\mu^2+1} = \frac{-2\mu}{\mu^2+1}$.

Έτσι τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι τα $\Sigma_\mu\left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2+1}, \frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)$ για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Σ_μ επαληθεύουν την εξίσωση αυτή.

Πράγματι: $\left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)^2 = \frac{\mu^4 - 2\mu^2+1+4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} = \frac{\mu^4 + 2\mu^2+1}{(1+\mu^2)^2} = 1$.

20890

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3,-3), Β(2,-8) και Γ(7,-3). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: ΒΓ: $y - y_\Gamma = \frac{y_B - y_\Gamma}{x_B - x_\Gamma}(x - x_\Gamma)$ ή ΒΓ: $y + 3 = \frac{-8+3}{2-7}(x - 7)$ ή ΒΓ: $y + 3 = \frac{-5}{-5}(x - 7)$

ή ΒΓ: $y + 3 = x - 7$ ή ΒΓ: $x - y - 10 = 0$.

β) Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$\rho = d(A, B\Gamma) = \frac{|1\cdot 3 - 1\cdot(-3) - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι:

C: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = \rho^2$ ή C: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = (2\sqrt{2})^2$ ή C: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 8$.