

A'2/5.39

$$d(A, x'x) = |2| = 2$$

$$d(B, x'x) = |4| = 4$$

$$d(\Gamma, x'x) = |-6| = 6$$

$$d(\Delta, x'x) = |\beta + 2|$$

$$d(M, x'x) = |y|$$

$$d(A, y'y) = |-1| = 1$$

$$d(B, y'y) = |3| = 3$$

$$d(\Gamma, y'y) = |-5| = 5$$

$$d(\Delta, y'y) = |a - 1|$$

$$d(M, y'y) = |x|$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$

Ορίζεται η ποσότητα που ονομάζεται

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

και συμβολίζεται με $\det(\vec{a}, \vec{b})$

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι παραλληλά, αν και μόνο αν η ορίζουσα τους είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή ισχύει: $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

Απόδειξη:

Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του επιπέδου.

• Αν $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ ($\vec{\beta} \neq \vec{0}$) τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow$

$$(x_1, y_1) = \lambda \cdot (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2) \Leftrightarrow \{x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2\}$$

$$\text{τότε } \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x_2 & \lambda y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \lambda x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot \lambda y_2 = 0$$

Αν $\vec{\beta} = \vec{0} = (0, 0)$, τότε

$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ (αφού το μηδενικό διάνυσμα είναι παράλληλο προς κάθε διάνυσμα και έχουμε:

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \cdot 0 - y_1 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\bullet Av \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \iff x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \iff x_1 y_2 = x_2 y_1 \xrightarrow{x_2 \neq 0} y_1 = \frac{x_1}{x_2} y_2$$

άρα: $y_1 = \lambda y_2 \left(\lambda = \frac{x_1}{x_2} \right)$

και επίσης $x_1 = \lambda x_2$

οπότε: $(x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda (x_2, y_2)$

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Av $x_2 = 0$ τότε $x_1 y_2 = 0 \iff x_1 = 0$ ή $y_2 = 0$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (0, y_1) \\ \vec{b} &= (0, y_2) \\ \vec{a} &\parallel \vec{b} \parallel y_1 y_2 \end{aligned}$$

$$\vec{b} = (0, 0) \text{ που είναι παράλληλο προς } \vec{a}$$

κάθε διάνυσμα

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$