

4. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων A και B της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$, που έχουν την ίδια τεταγμένη και ισχύει $\hat{A\hat{O}B} = 90^\circ$.

4. Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία της παραβολής με την ίδια τεταγμένη.

Έχουμε $y_1 = \frac{1}{4}x_1^2$ και $y_2 = \frac{1}{4}x_2^2$ και $y_1 = y_2$. Επομένως $\frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{4}x_2^2$, οπότε

$x_2 = -x_1$. Έτσι, τα σημεία είναι τα $A(x_1, y_1)$ και $B(-x_1, y_1)$ και επομένως έχουμε:

$$\hat{A\hat{O}B} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (x_1, y_1)(-x_1, y_1) = 0 \Leftrightarrow -x_1^2 + y_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y_1 + y_1^2 = 0 \Leftrightarrow y_1(y_1 - 4) = 0 \Leftrightarrow y_1 = 4$$

Από τη σχέση $y_1 = \frac{1}{4}x_1^2$, για $y_1 = 4$, έχουμε $4 = \frac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow x_1 = 4$ ή $x_1 = -4$.

Άρα, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(4, 4)$ και $B(-4, 4)$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$
- (ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x$
- (iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$.

5. Η εξίσωση της παραβολής γράφεται $x^2 = 2 \cdot 2 \cdot y$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης ε στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι

$$xx_1 = 2(y + y_1), \text{ οπότε } y = \frac{x_1}{2} \cdot x - y_1.$$

(i) Επειδή η ε είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$, έχουμε $\frac{x_1}{2} = 1$, οπότε $x_1 = 2$.

Όμως $x_1^2 = 4y_1$. Επομένως $y_1 = 1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = x - 1$.

(ii) Επειδή η ε είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x$, έχουμε $\frac{x_1}{2}(-2) = -1$, οπότε $x_1 = 1$. Όμως $x_1^2 = 4y_1$. Επομένως $y_1 = \frac{1}{4}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

(iii) Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$, έχουμε $-1 = -y_1$, οπότε $y_1 = 1$. Όμως $x_1^2 = 4y_1$. Επομένως $x_1^2 = 4$, οπότε $x_1 = 2$ ή $x_1 = -2$. Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $M_1(2, 1)$ και $M_2(-2, 1)$, και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις $y = x - 1$ και $y = -x - 1$ αντιστοίχως.