

Σχήμα Horner (Χόρνερ)

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολωνύμου, π.χ. του $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x + 2$, με ένα πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$. Η Ευκλείδεια διαίρεση του $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι η ακόλουθη:

$3x^3 - 8x^2$

$+ 7x + 2$

$- 3x^3 + 3\rho x^2$

$(3\rho - 8)x^2$

$+ 7x + 2$

$- (3\rho - 8)x^2 + \rho(3\rho - 8)x$

$[\rho(3\rho - 8) + 7]x + 2$

$- [\rho(3\rho - 8) + 7]x + \rho[\rho(3\rho - 8) + 7]$

$\underbrace{\rho[\rho(3\rho - 8) + 7] + 2}_{P(\rho)}$

$x - \rho$

$3x^2 + (3\rho - 8)x + \rho(3\rho - 8) + 7$

Η παραπάνω διαίρεση μπορεί να παρουσιασθεί εποπτικά με τον ακόλουθο πίνακα που είναι γνωστός ως σχήμα του Horner.

Συντελεστές του P(x)

3	-8	7	2	ρ
	3ρ	(3ρ-8)ρ	[(3ρ-8)ρ+7]ρ	
3	3ρ-8	(3ρ-8)ρ+7	[(3ρ-8)ρ+7]ρ+2	

Συντελεστές Πηλίκου

Υπόλοιπο

Για την κατασκευή του πίνακα αυτού εργαζόμαστε ως εξής:

— Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου $P(x)$ και στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής τον πρώτο συντελεστή του $P(x)$.

Στη συνέχεια ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

— Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ .

— Κάθε άλλο στοιχείο της τρίτης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.

Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - \rho)$, δηλαδή η τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$. Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

ii) $(x^4 - 81) : (x - 3)$

1	0	0	0	-81	3
↓	3	9	27	81	
1	3	9	27	0	

$$v) x^4 : (x-1)^3$$

$$\begin{array}{r|l}
 (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & \\
 x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x & x + 3 \\
 \hline
 3x^3 - 3x^2 + x + 0 & \\
 - 3x^3 + 9x^2 - 9x + 3 & \\
 \hline
 6x^2 - 8x + 3 &
 \end{array}$$

$$\text{άρα: } x^4 = (x-1)^3(x+3) + (6x^2 - 8x + 3)$$

2. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(18x^{80} - 6x^{50} + 4x^{20} - 2) : (x+1)$.

Το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης είναι το $P(-1)$.

$$\begin{aligned}
 P(-1) &= 18(-1)^{80} - 6(-1)^{50} + 4(-1)^{20} - 2 = \\
 &= 18 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 = 18 - 6 + 4 - 2 = 14
 \end{aligned}$$

Για το επόμενο μάθημα: Σελίδα 139: Την υπόλοιπη άσκηση 1 και την άσκηση 3