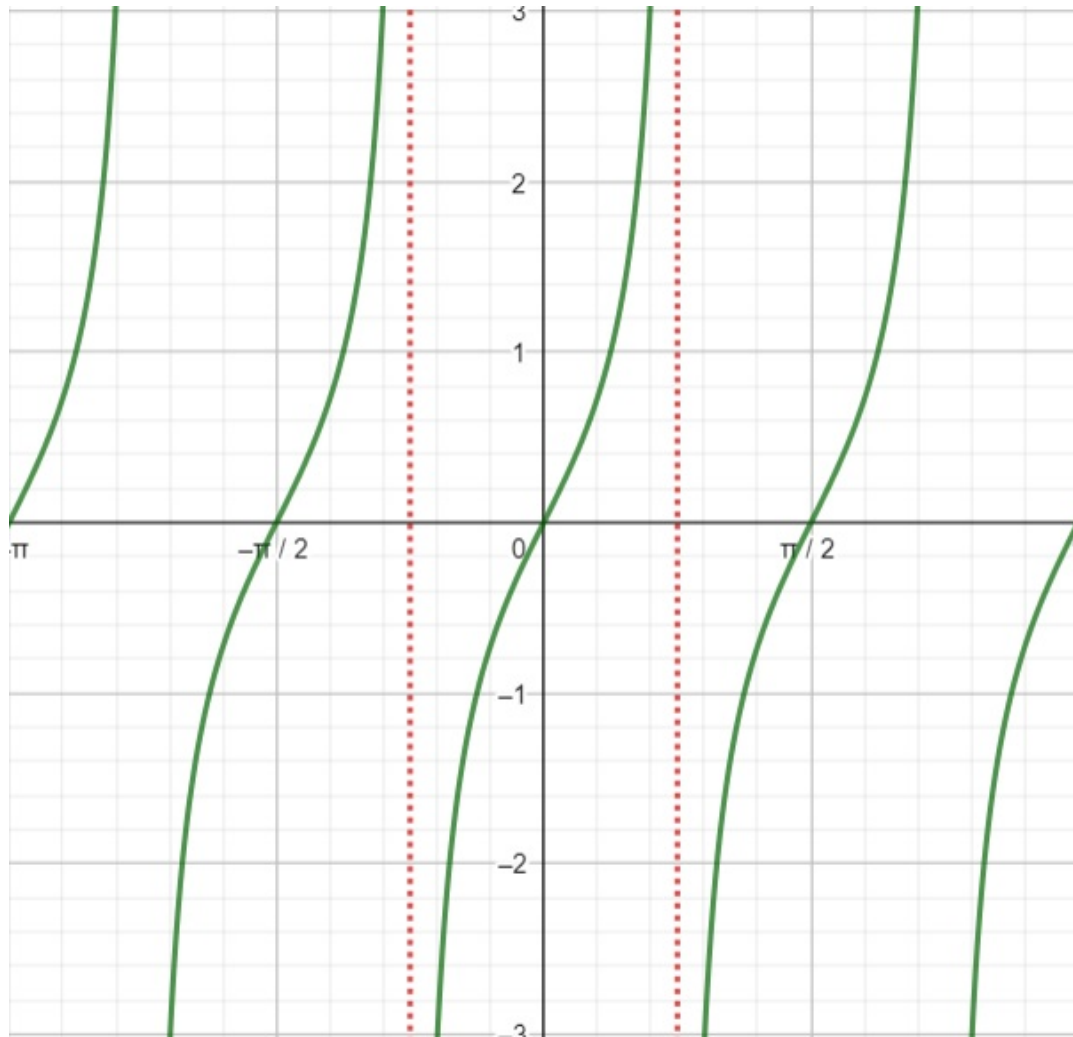


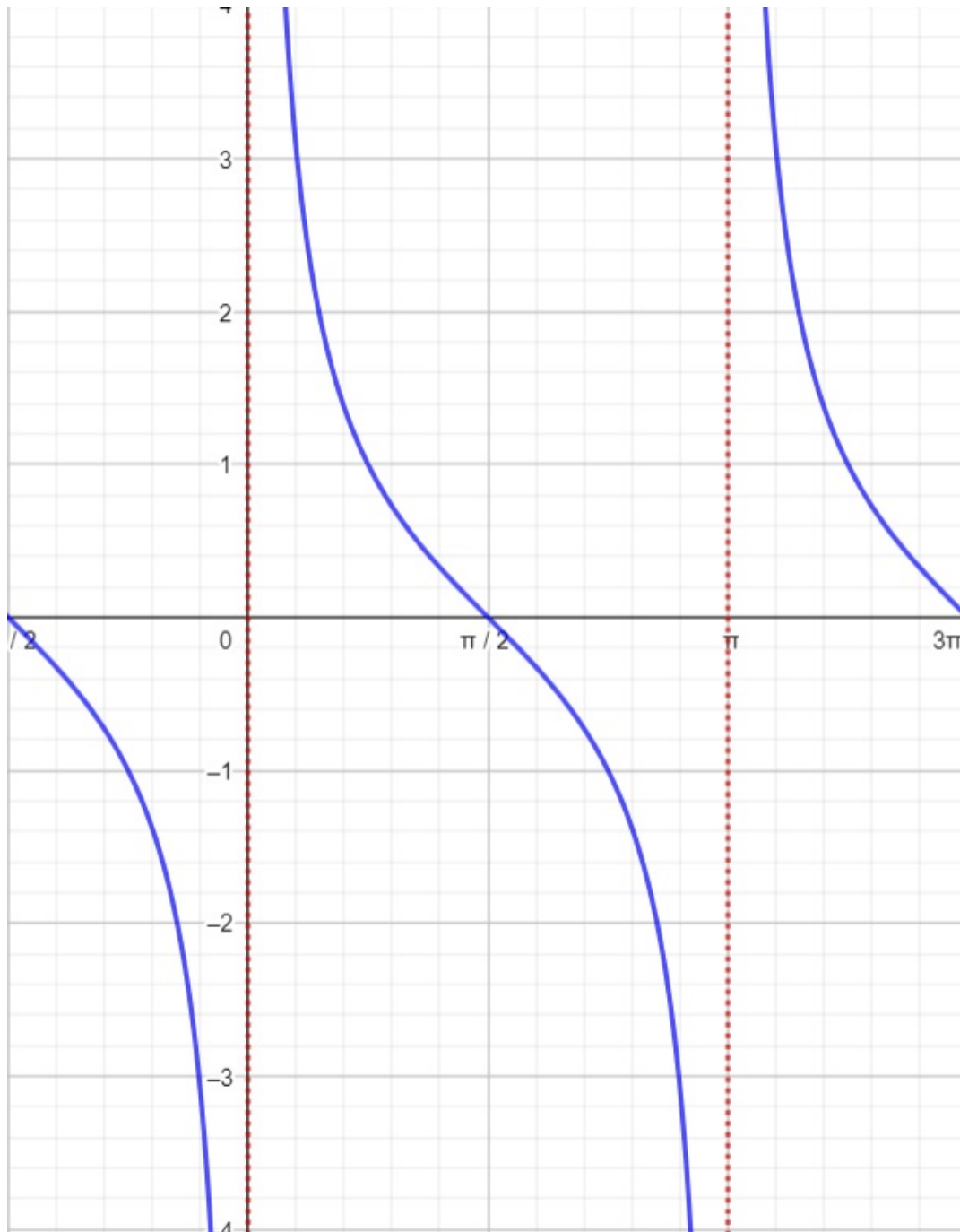
8. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi 2x$.



$$T = \frac{\pi}{2}$$

Διάστημα μίας περιόδου:
 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

9. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$.



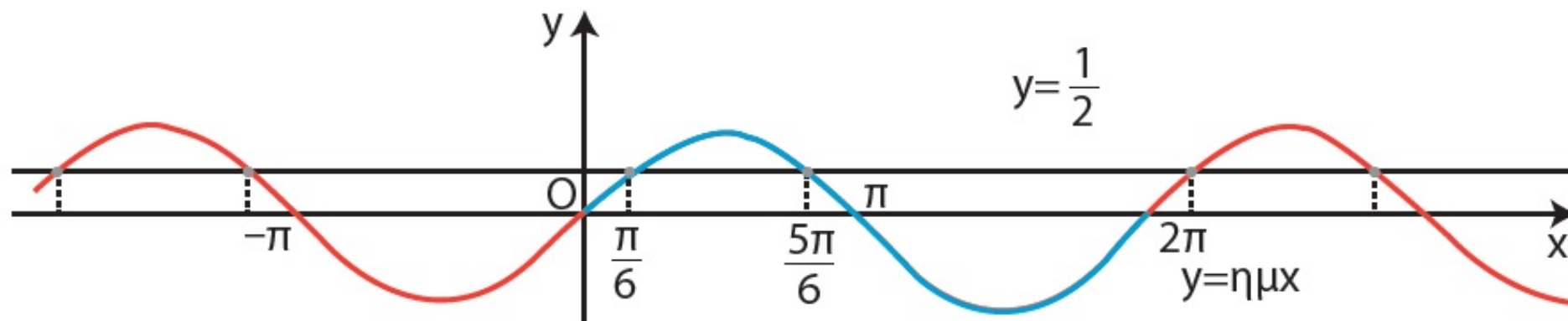
περίοδος $T=\pi$

διάστημα μίας περιόδου :
 $(0, \pi)$

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η εξίσωση $\eta\mu x = a$

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. Είναι φανερό ότι ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης $y = \eta\mu x$ και της ευθείας $y = \frac{1}{2}$.



Ζητάμε δηλαδή εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$. Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π , για να βρούμε τα ζητούμενα x , που είναι άπειρα σε πλήθος (βλ. σχήμα), αρκεί να βρούμε όσα από αυτά υπάρχουν σε ένα διάστημα πλάτους 2π και σε καθένα να προσθέσουμε το $\kappa \cdot 2\pi$, όπου κ ακέραιος.

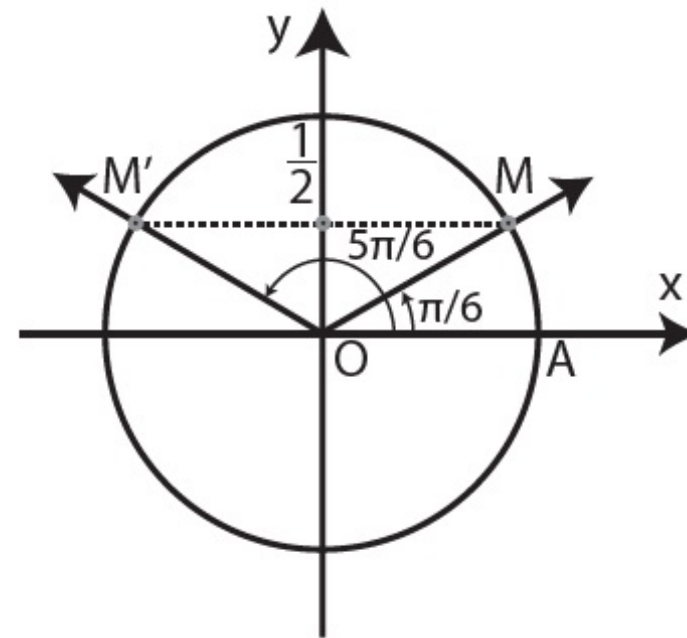
Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, είναι οι $\frac{\pi}{6}$ και $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, γιατί

$$\eta\mu \frac{\pi}{6} = \eta\mu \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$\eta\mu x = \frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$



Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = a$, αν δηλαδή ισχύει $\eta\mu\theta = a$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} x &= 2\kappa\pi + \theta \\ &\quad \text{ή} \\ x &= 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{aligned}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1^ο Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως η εξίσωση γράφεται

$\eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, οπότε οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2κπ - \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = 2κπ + \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}$$

2^ο Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, έχουμε $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6}$, οπότε

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ισχύει όμως

$$\text{και} \quad 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{24}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{24}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. 1(i,ii), 2(i,ii), 5(i) (σελ. 88)