

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

$$\text{ii)} \frac{x^2}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} = \frac{4}{x^2 - 1}$$

i) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

Για αυτές τις τιμές του x η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} x(3x^2 - 1) - 2 &= (x - 1)(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow \\ 3x^3 - x - 2 &= x^3 - 3x^2 + 2x - x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow \\ 2x^3 + 4x^2 - 6x &= 0 \Leftrightarrow \\ 2x(x^2 + 2x - 3x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 2x = 0 \text{ (αδύνατο)} \\ x^2 + 2x - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \text{ (αδύνατο)} \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

Για αυτές τις τιμές του x η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} x^2(x + 1) - 2(x - 1) &= 4 \Leftrightarrow \\ x^3 + x^2 - 2x - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2(x + 1) - 2(x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (x + 1)(x^2 - 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ x = -1 \text{ (απορρίπτεται)} &\text{ ή } x = -\sqrt{2} \text{ ή } x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{ii)} \quad \sqrt{3x - 2} = 4$$

$$\text{iii)} \quad \sqrt{5x - 1} = -4$$

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Για αυτές τις τιμές του x έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{3x - 2} = 4 \Leftrightarrow (\text{υψώνουμε στο τετράγωνο})$$

$$3x - 2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$3x = 18 \Leftrightarrow$$

$x = 6$. Με επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι το 6 είναι και ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

iii) Η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού $\sqrt{5x - 1} > 0$, ενώ $-4 < 0$.

$$\text{vi)} \quad \sqrt{x} + \sqrt{x - 20} = 10$$

vi) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \geq 0$ και $x - 20 \geq 0$ δηλαδή για $x \geq 20$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε διαδοχικά:

$$(\sqrt{x - 20})^2 = (10 - \sqrt{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$x - 20 = 100 - 20\sqrt{x} + x \Leftrightarrow$$

$$20\sqrt{x} = 100 + 20 + x - x \Leftrightarrow$$

$$20\sqrt{x} = 120 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow$$

$$x = 36$$

Η τιμή 36 ικανοποιεί τον περιορισμό $x \geq 20$ και αν θέσουμε στην αρχική $x = 36$, αυτή επαληθεύεται. Επομένως το 36 είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 (< 0)$

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0,$$

αφού, καμία από τις λύσεις της $A(x) \cdot B(x) > 0$ και της $A(x) \cdot B(x) < 0$ δεν μηδενίζει το $B(x)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0$$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{iii)} \quad \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0$$

$$\text{iii)} \quad \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) \leq 0 \text{ με } x^2 + x - 2 \neq 0$$

Έστω $P(x) = (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2)$. Έχουμε:

$$\Delta_1 = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Delta_2 = 1 + 8 = 9$$

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	+	0	-	-	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	-	0	+
$\chi_{\text{ιν}}$	+	+	-	0	+	+

$$x \in (-2, 1] \cup (1, 2]$$

Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. Α' ομάδας 4 (i, ii), 5(iv, v) (σελ. 153 - 154)