

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η λογαριθμική συνάρτηση

Έστω a ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2, για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο $\log_a x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_a x$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \log_a x$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση a** .

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y = \log_a x \text{ και } y = a^x$$

είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

Αν $a > 1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$:

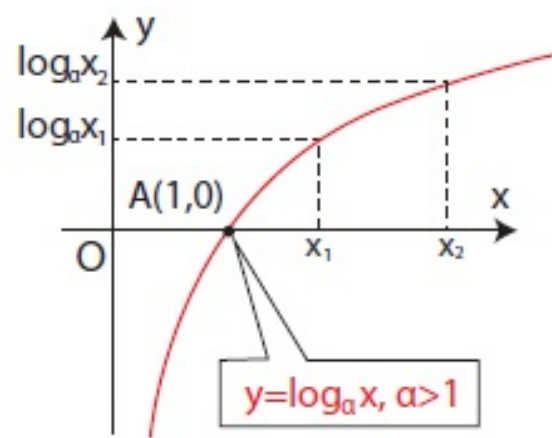
- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } \log_a x_1 < \log_a x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$(\log_a x < 0, \text{ αν } 0 < x < 1) \text{ και } (\log_a x > 0, \text{ αν } x > 1)$$

- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' .



Αν $0 < \alpha < 1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_{\alpha} x$:

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι:

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } \log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

($\log_{\alpha} x > 0$, αν $0 < x < 1$) και ($\log_{\alpha} x < 0$, αν $x > 1$)

- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy .

Τέλος, από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } \log_{\alpha} x_1 \neq \log_{\alpha} x_2$$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

$$\text{αν } \log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2, \text{ τότε } x_1 = x_2$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Η τελευταία ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για επίλυση εξισώσεων όπως π.χ. η $\log_2(x^2 - 1) = 3$, που λύνεται ως εξής:

$$\log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2 2^3$$

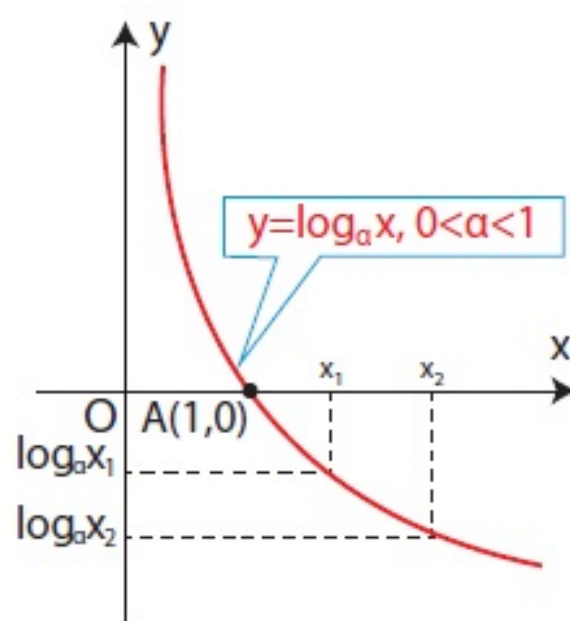
$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

Εξισώσεις όπως η προηγούμενη, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στο λογάριθμο λέγονται **λογαριθμικές εξισώσεις**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

2° Να βρεθεί το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Από την ανισότητα

$$2 > 1$$

παίρνουμε διαδοχικά:

$$2 \log 0,5 > 1 \log 0,5$$

$$\log 0,5^2 > \log 0,5$$

$$\log 0,25 > \log 0,5$$

$$0,25 > 0,5,$$

που είναι άτοπο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη της ανισότητας $2 > 1$ με $\log 0,5 < 0$ και δεν αλλάξαμε φορά.

3° Να λυθεί η εξίσωση:

$$\log_2(x^2 - x) = 1 + \log_2(x - 1)$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x^2 - x > 0$ και $x - 1 > 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\log_2(x^2 - x) = \log_2 2 + \log_2(x - 1) \Leftrightarrow \log_2(x^2 - x) = \log_2[2(x - 1)]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Από τις τιμές αυτές του x μόνο η $x=2$ ικανοποιεί τους περιορισμούς. Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, τη $x = 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

3. Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ και τη λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο:

i) A(2,4) ii) B(-2,4) iii) Γ(2,-4) iv) Δ(-2,-4)

i) A(2,4)

$$\bullet \quad f(2) = 4 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \text{ άρα } f(x) = 2^x$$

$$\bullet \quad g(2) = 4 \Leftrightarrow \log_a 2 = 4 \Leftrightarrow a^4 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt[4]{2} \text{ άρα } g(x) = \log_{\sqrt[4]{2}} x$$

ii) B(-2,4)

- $f(-2) = 4 \Leftrightarrow a^{-2} = 4 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ άρα $f(x) = 2^{\frac{1}{2}}$
- Η $g(x) = \log_a x$ δεν ορίζεται για αρνητικό αριθμό

iii) Γ(2, -4)

- $f(2) = -4 \Leftrightarrow a^2 = -4$ (αδύνατο)
- $g(2) = -4 \Leftrightarrow \log_a 2 = -4 \Leftrightarrow a^{-4} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ άρα $g(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} x$

iv) Δ(-2, -4)

- $f(-2) = -4 \Leftrightarrow a^{-2} = -4 \Leftrightarrow a^2 = -\frac{1}{4}$ (αδύνατο)
- Η $g(x) = \log_a x$ δεν ορίζεται για αρνητικό αριθμό

Για το επόμενο μάθημα:
Ασκ. Α' Ομάδας: 5, 6, 7 (σελ. 185)