

15431 (συνέχεια)

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x)$: $(x - 1)$ με το σχήμα Horner και έχουμε:

2	-9	12	-5	1
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

Άρα, $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x + 5)$. Το τριώνυμο $2x^2 - 7x + 5$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9$ και ρίζες:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{9}}{4} = \frac{5}{2} \text{ και } x_2 = \frac{7 - \sqrt{9}}{4} = 1.$$

Άρα, $P(x) = (x - 1)2(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right) = 2(x - 1)^2\left(x - \frac{5}{2}\right)$.

Η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2\left(x - \frac{5}{2}\right) < 0.$$

Ο πίνακας προσήμων του $P(x)$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$(x - 1)^2$	+	0	+	+
$\left(x - \frac{5}{2}\right)$	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	-	+

Άρα, $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{5}{2})$.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1,0)$ και $(\frac{5}{2}, 0)$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

ΘΕΜΑ 2

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.

(Μονάδες 7)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε

$$P(x) = (2x-1)(x^2-2) + 1 = 2x^3 - 4x - x^2 + 2 + 1 = 2x^3 - x^2 - 4x + 3.$$

β) Με $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

i. Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ φαίνεται παρακάτω.

2	-1	-4	3	1
	2	1	-3	
2	1	-3	0	

Συνεπώς το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$ είναι

$$P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 3).$$

ii. Έχουμε λοιπόν: $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + x - 3) = 0$ οπότε

$$x-1=0 \text{ ή } 2x^2 + x - 3 = 0 \text{ δηλαδή } x=1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-\frac{3}{2}.$$

$$\text{Τελικά } x=1 \text{ (διπλή ρίζα) ή } x=-\frac{3}{2}.$$