

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A' ΟΜΑΔΑΣ (Σελ. 147)

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες.

i) $x^4 + 3x - 2 = 0$

ii) $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 24x + 5 = 0$

i) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm 1, \pm 2$. Αν θέσουμε $P(x) = x^4 + 3x - 2$, θα είναι $P(1) = 2 \neq 0$, $P(-1) = -4 \neq 0$, $P(2) = 20 \neq 0$ και $P(-2) = 8 \neq 0$. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

ii) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: $\pm 1, \pm 5$. Αν θέσουμε $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 24x + 5$ και υπολογίσουμε τα $P(1), P(-1), P(5), P(-5)$, βρίσκουμε ότι κανένα από αυτά δεν είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι της μορφής $ax + b$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $ax^2 + bx + c$ (τριώνυμα).

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1).$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

✓ Επειδή

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

το $x - 1$ είναι θετικό για $x > 1$, μηδέν για $x = 1$ και αρνητικό για $x < 1$.

✓ Επειδή $x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad \text{ή} \quad x \geq 2$,
το $x^2 + x - 6$ είναι θετικό για $x < -3$ και για $x > 2$, μηδέν για $x = -3$ και για $x = 2$ και αρνητικό για $-3 < x < 2$.

✓ Επειδή το $2x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου $P(x)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
x-1	-	-	0	+	+
x^2+x-6	+	0	-	0	+
$2x^2+x+1$	+	+	+	+	+
P(x)	-	0	+	0	+

Ωστε το γινόμενο $P(x)$ είναι θετικό για $-3 < x < 1$ και για $x > 2$, ενώ είναι αρνητικό για $x < -3$ και για $1 < x < 2$. Τέλος είναι μηδέν για $x = -3$, για $x = 1$ και για $x = 2$.

Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0)

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0), όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1) < 0$$

Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το γινόμενο $P(x) = (x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$ είναι αρνητικό.

Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του $P(x)$ διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 > 0$

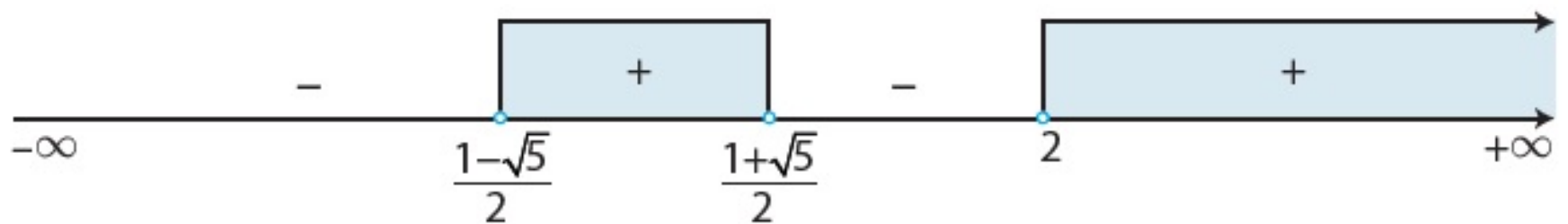
ΛΥΣΗ

Αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 1, η ανίσωση γράφεται

$$(x-2)(x^2-x-1) > 0 \quad \text{ή} \quad (x-2)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0.$$

Τοποθετούμε τις ρίζες του $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ σε άξονα και παρατηρούμε ότι:

Στο 1ο από δεξιά διάστημα $(2, +\infty)$ το $P(x)$ είναι θετικό, αφού όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί. Στο επόμενο διάστημα $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ το $P(x)$ είναι αρνητικό, αφού ένας μόνο παράγοντας, ο $x-2$, είναι αρνητικός. Αν συνεχίσουμε έτσι, βρίσκουμε το πρόσημο του $P(x)$ σε όλα τα διαστήματα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in \mathbb{R}$, με $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x > 2$.