

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Η έννοια του πολυωνύμου

Έστω x μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

- Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής ax^n , όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος.
Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

- Καλούμε **πολυνώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα μονώνυμα $\alpha_n x^n, \alpha_{n-1} x^{n-1}, \dots, \alpha_1 x, \alpha_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ **συντελεστές** αυτού. Ειδικότερα ο α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

Τα πολυώνυμα της μορφής α_0 , δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

Δυο πολυώνυμα

$\alpha_\mu x^\mu + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $\beta_\nu x^\nu + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, με $\mu \geq \nu$
θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \dots, \quad \alpha_\nu = \beta_\nu \text{ και } \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$$

Έστω τώρα ένα πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

- Αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν, τότε το $P(x)$ είναι ίσο με το πολυώνυμο 0 (μηδενικό πολυώνυμο).
- Αν όμως ένας από τους συντελεστές του είναι διαφορετικός από το μηδέν, τότε το $P(x)$ παίρνει τη μορφή:

$$\alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \text{ με } \alpha_k \neq 0$$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός k λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου $P(x)$. Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Έστω ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Αν αντικαταστήσουμε το x με έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ρ , τότε ο πραγματικός αριθμός $P(\rho) = \alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$ που προκύπτει λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** του πολυωνύμου για $x=\rho$.

Αν είναι $P(\rho)=0$, τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου.

Είναι φανερό ότι:

- Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και
 - Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x (*)
- (*) Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι:
- Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x , τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και
 - Αν δύο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x , τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

Πράξεις με πολυώνυμα

Μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1° i) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- ii) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $Q(x) = \lambda^2 x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 3$ και $R(x) = (5\lambda - 6)x^3 + (\lambda^2 - 4)x^2 + \lambda + 1$ είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

i) Το $P(x)$ θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο, για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda - 1 = 0$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η $\lambda = 1$. Επομένως για $\lambda = 1$ το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Τα $Q(x)$ και $R(x)$ θα είναι ίσα για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6, \quad \lambda - 2 = \lambda^2 - 4 \quad \text{και} \quad 3 = \lambda + 1$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η $\lambda = 2$. Επομένως για $\lambda = 2$ τα πολυώνυμα $Q(x)$ και $R(x)$ είναι ίσα.

Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. Α' Ομάδας: 2, 4, 5 (σελ. 131)