Κεφάλαιο 5ο

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Αν α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Επιπλέον, αν μ, ν, θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

Συμβολικά γράφουμε:

$$\alpha^{x} = \lim_{\nu \to \infty} \alpha^{\rho_\nu}$$

Το όριο αυτό συμβολίζεται με α^x και λέγεται **δύναμη του α με εκθέτη x**.

Επιπλέον, για κάθε $x > 0$, ορίζουμε $0^x = 0$.

Ο υπολογισμός δυνάμεων με άρρητο εκθέτη γίνεται με υπολογιστή τσέπης

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων, γνωστές από την Α΄ Λυκείου, αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για δυνάμεις με εκθέτη πραγματικό αριθμό.

Συγκεκριμένα:

Αν α, β είναι **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 + x_2} \qquad \alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 - x_2}$$

$$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2}$$

$$(\alpha \cdot \beta)^{x} = \alpha^{x} \cdot \beta^{x} \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x} = \frac{\alpha^{x}}{\beta^{x}}$$

Εκθετική συνάρτηση

Έστω α ένας **θετικός** αριθμός. Όπως είδαμε προηγουμένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δύναμη α^x. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη α^x, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ με } \ f(x) = \alpha^x,$$

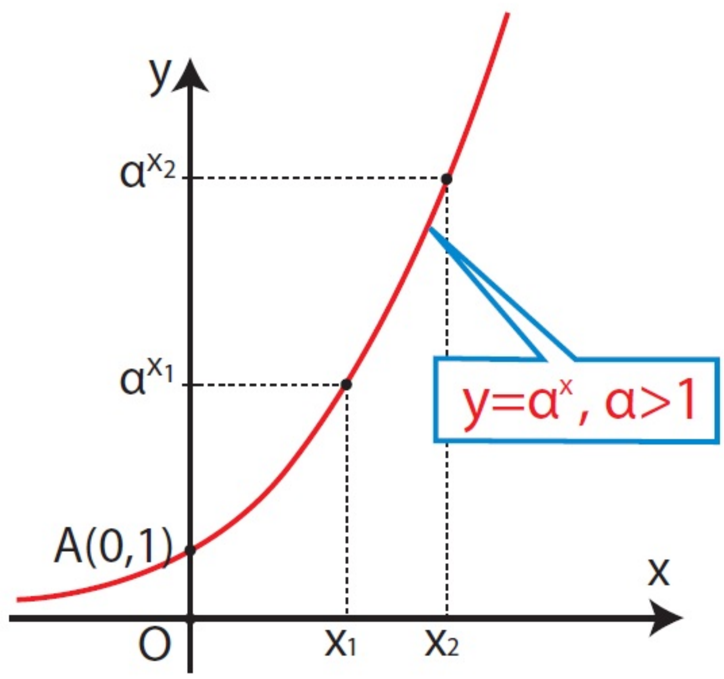
η οποία, στην περίπτωση που είναι $\alpha \neq 1$, λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση α**.

Αν είναι **α = 1**, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση **f(x) = 1**.

Η συνάρτηση αυτή, καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$\mathbf{f(x) = \alpha^x \ \text{με} \ \alpha > 1},$$

αποδεικνύεται ότι:



- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\mathbf{\text{αν } x_1 < x_2, \ \text{ τότε } \ \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}}$$

- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x.

Η συνάρτηση αυτή, καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$\mathbf{f(x) = \alpha^x \ \text{με} \ 0 < \alpha < 1},$$

αποδεικνύεται ότι:

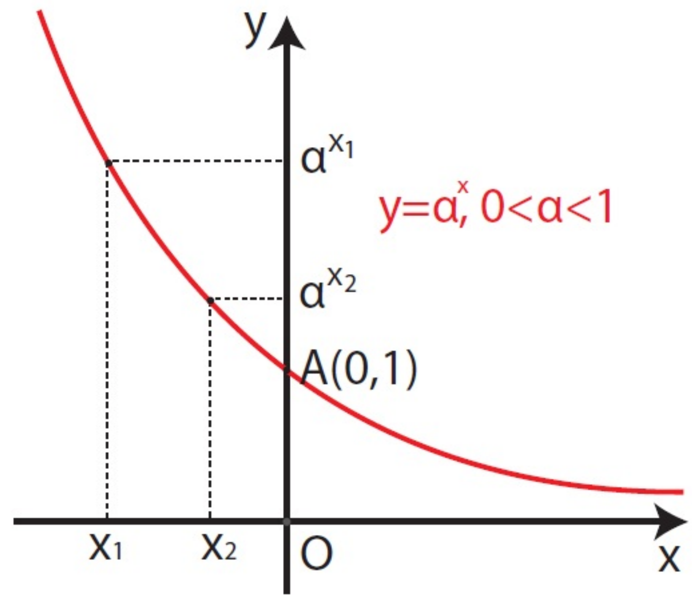
- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

• Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.

• Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$$

• Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Α(0,1) και έχει ασύμπτωτο το θετικό ημιάξονα των x.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2^{3x} = \dfrac{1}{64}$ **ii)** $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

ΛΥΣΗ

i) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2^{3x} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-6}$$
$$\Leftrightarrow 3x = -6$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$

[Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι 1–1]

ii) Η εξίσωση γράφεται

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

Αν θέσουμε $3^x = y$, αυτή γίνεται $y^2 - 8y - 9 = 0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 9. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$3^x = -1 \text{ και } 3^x = 9$$

Απ' αυτές η πρώτη είναι αδύνατη, αφού $3^x > 0$, ενώ η δεύτερη γράφεται $3^x = 3^2$ και έχει ρίζα το x=2, που είναι και μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.