

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 5x + 2$ και $Q(x) = x^3 + 3x + 1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) $P(x) + Q(x)$ ii) $2P(x) - 3Q(x)$ iii) $P(x) \cdot Q(x)$ iv) $[P(x)]^2$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{i)} \quad P(x) + Q(x) &= x^2 - 5x + 2 + x^3 + 3x + 1 \\ &= x^3 + x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad 2P(x) - 3Q(x) &= 2(x^2 - 5x + 2) - 3(x^3 + 3x + 1) \\ &= 2x^2 - 10x + 4 - 3x^3 - 9x - 3 \\ &= -3x^3 + 2x^2 - 19x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad P(x) \cdot Q(x) &= (x^2 - 5x + 2)(x^3 + 3x + 1) \\ &= x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 3x^3 - 15x^2 + 6x + x^2 - 5x + 2 \\ &= x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad [P(x)]^2 &= (x^2 - 5x + 2)^2 \\ &= x^4 + 25x^2 + 4 - 10x^3 + 4x^2 - 20x \\ &= x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 20x + 4. \end{aligned}$$

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ίσα.

$$4. \text{ Από τον ορισμό της ισότητας δύο πολυωνύμων αρκεί}$$

$$\alpha^2 - 3\alpha = -2 \quad \text{και} \quad 1 = \alpha^2 \quad \text{και} \quad \alpha^3 - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha = 1 \quad \text{ή}$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha^2 - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha^3 - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha = 1.$$

Η κοινή ρίζα αυτών είναι $\alpha = 1$, που είναι η ζητούμενη τιμή του α .

5. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους.

i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ $x = -1,$ $x = 1$

ii) $Q(x) = -x^4 + 1$ $x = -1,$ $x = 1,$ $x = 3.$

5. i) Έχουμε

- $P(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 7 = -2 - 3 - 2 + 7 = 0$, οπότε το -1 είναι ρίζα του $P(x)$.

- $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 7 = 8$, οπότε το 1 δεν είναι ρίζα του $P(x)$.

ii) Ομοίως έχουμε

- $Q(-1) = -(-1)^4 + 1 = -1 + 1 = 0$, οπότε το -1 είναι ρίζα του $Q(x)$.

- $Q(1) = -1^4 + 1 = -1 + 1 = 0$, οπότε το 1 είναι ρίζα του $Q(x)$.

- $Q(3) = -3^4 + 1 = -80 \neq 0$, οπότε το 3 δεν είναι ρίζα του $Q(x)$.

2° Αν $P(x) = x^2 + 3x + \alpha^2 - 1$, να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $P(-1) = 1$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}\text{Έχουμε} \quad P(-1) = 1 &\Leftrightarrow (-1)^2 + 3(-1) + \alpha^2 - 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = -2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 2\end{aligned}$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι οι: $-2, 2$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , για τους οποίους το πολυώνυμο $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x(x+1) + \beta x + \gamma$

$$\begin{aligned}1. \quad \text{Έχουμε} \quad f(x) &= \alpha x(x+1) + \beta x + \gamma = \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \gamma \\ \text{Για να παίρνει το } 3x^2 - 7x + 5 &\text{ τη μορφή } \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \gamma \text{ αρκεί τα δύο} \\ \text{αυτά πολυώνυμα να είναι ίσα. Αυτό σημαίνει ότι} \\ &\alpha = 3, \quad \alpha + \beta = -7 \text{ και } \gamma = 5, \text{ οπότε} \\ &\alpha = 3, \quad \beta = -10 \text{ και } \gamma = 5\end{aligned}$$

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ , για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2) = -12$.

3. Το 1 είναι ρίζα του $P(x)$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}P(1) = 0 &\Leftrightarrow 2 + \lambda + \mu + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda + \mu = -8 \quad (1)\end{aligned}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned}P(-2) = -12 &\Leftrightarrow 2(-2)^3 + \lambda(-2)^2 + \mu(-2) + 6 = -12 \\ &\Leftrightarrow -16 + 4\lambda - 2\mu + 6 = -12 \\ &\Leftrightarrow 4\lambda - 2\mu = -2 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda - \mu = -1 \quad (2)\end{aligned}$$

Από (1) και (2) παίρνουμε $\lambda = -3$ και $\mu = -5$.

Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. Α' Ομάδας 6, 7 (σελ 131 - 132)