

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^5 - 162x \leq 0$

ii) $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$

iv) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \leq 0$

i) $2x^5 - 162x \leq 0$

$2x(x^4 - 81) \leq 0$

Ελέγχω πότε μηδενίζονται οι
παράγοντες του γινομένου.

$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 81 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{81}$
 $\Leftrightarrow x = \pm 3$

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$2x$		-	-	0	+
x^4-81		+	0	-	-
f_{uv}		-	0	+	0

$2x^5 - 162x \leq 0$ για $x \in (-\infty, -3] \cup [0, 3]$

ii) $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

$[x^2(x-1) + 2(x-1)](x^2-9) > 0$

$(x-1)(x^2+2)(x-3)(x+3) > 0$

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$	
x-1		-	-	0	+	+
x-3		-	-	-	0	+
x+3		-	0	+	+	+
f _{uv}		-	+	-	+	+

$(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$ για
 $x \in (-3, 1) \cup (3, +\infty)$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$

2	-5	-6	9	1
	2	-3	-9	
2	-3	-9	0	

$2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 = (x-1)(2x^2 - 3x - 9)$

Για το $2x^2 - 3x - 9$:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)$

$= 9 + 72 = 81$

$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 9}{4} = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-3/2$	1	3	$+\infty$
x-1		-	-	0 +	+
$2x^2-3x-9$		+	0 -	-	0 +
f.v		-	+	-	+

$2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$ για
 $x \in (-\frac{3}{2}, 1) \cup (3, +\infty)$

iv) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \leq 0$

1	-4	-3	18	-2
	-2	12	-18	
1	-6	9	0	

$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x+2)(x^2 - 6x + 9)$
 $= (x+2)(x-3)^2$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$
$(x-3)^2$		$+$	$+$	0
Γ_{UV}		$-$	0	$+$

$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \leq 0$
για $x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 > 0$

ii) $x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 \leq 0$

iii) $x^3 - 3x + 2 < 0$

iv) $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 \geq 0$

i) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 > 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x+2) + 3(x+2) > 0 \Leftrightarrow$

$(x^2+3)(x+2) > 0 \xrightarrow{x^2+3>0}$

$x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

iii) $x^3 - 3x + 2 < 0$

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

ii) $x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 \leq 0$

$(x-1)(x^3 - 5x^2 + 17x - 13) \leq 0$

$(x-1)(x-1)(x^2 - 4x + 13) \leq 0$

1	-6	22	-30	13	1
	1	-5	17	-13	
1	-5	17	-13	0	

1	-5	17	-13	1
	1	-4	13	
1	-4	13	0	

Για το $x^2 - 4x + 13$:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 < 0$

άρα $x^2 - 4x + 13 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	0	+
$x^2 - 4x + 13$	+	+	+
Γ.Λ.Υ	+	0	+

άρα $x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 \leq 0$

για $x=1$ (όπου μηδενίζεται)

$x^3 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) < 0$

για το $x^2 + x - 2$: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = < -2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
x^2+x-2	+	0	-	+
Γ.Λ.Υ	-	0	+	+

άρα $x^3 - 3x + 2 < 0$ για $x \in (-\infty, -2)$

iv) $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 \geq 0$

1	-1	1	-3	-6	-1
	-1	2	-3	6	
1	-2	3	-6	0	

1	-2	3	-6	2
	2	0	6	
1	0	3	0	

$x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(x-2)(x^2+3) \geq 0$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
x^2+3	+	+	+	+
Γ.Λ.Υ	+	0	-	+

$x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

8. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

$$8) f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$$

$$\text{Θέλω } f(x) < 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x < 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) < 0$$

1	-5	3	1	1
	1	-4	-1	
1	-4	-1	0	

$$x(x-1)(x^2 - 4x - 1) < 0$$

$$\text{για το } x^2 - 4x - 1: \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 16 + 4 = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$(2-\sqrt{5})$	0	1	$(2+\sqrt{5})$	$+\infty$
x	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+
x^2-4x-1	+	0	-	-	-	0
$f(x)$	+	0	-	0	+	0

$$\text{άρα } f(x) < 0 \text{ για } x \in (2-\sqrt{5}, 0) \cup (1, 2+\sqrt{5})$$

Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. Β' Ομάδας 6, 7, 8 (σελ. 148)